УДК 735.29

О НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИХ РЕКУРРЕНТНЫХ АЛГОРИТМАХ КРИВОЙ РЕГРЕССИИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ

Ликсонова Д. И.,

научный руководитель профессор Медведев А.В.

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева

Исследуется непараметрическая рекуррентная оценка функции регрессии по наблюдениям с ошибками и непараметрическое управление безынерционными системами. Приведены результаты моделирования рекуррентных оценок при различных значениях аргумента кривой регрессии и результаты моделирования управления при изменении величины поискового шага.

Об исследовании непараметрической рекуррентной оценки функции регрессии. Пусть дана двумерная случайная величина (x, y) с неизвестными плотностями распределения $p(x, y)$, $p(x) > 0$ для любых $x \in R^1$, и выборка статистически независимых наблюдений $\left(x_i, y_i, i = \overline{1, s}\right)$.

Известно [1], что непараметрическая оценка функции регрессии имеет следующий вид:

$$y_S(x) = \sum_{i=1}^{S} y_i \Phi\left(\frac{x - x_i}{c_S}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{S} \Phi\left(\frac{x - x_i}{c_S}\right), \qquad (1)$$

где колоколообразные функции $\Phi\left(\frac{x - x_i}{c_S}\right)$ и параметр размытости $\tilde{n}_S$ удовлетворяют некоторым условиям сходимости. В качестве непараметрической оценки функции регрессии может быть также использована следующая статистика:

$$\tilde{y}_S(x) = \sum_{i=1}^{S} c_i^{-1} y_i \hat{O}\left(\frac{x - x_i}{c_i}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{S} c_i^{-1} \hat{O}\left(\frac{x - x_i}{c_i}\right). \qquad (2)$$

Из (2) может быть получена рекуррентная оценка функции регрессии [2]. Для этого в (2) прибавим и вычтем $\tilde{y}_{S-1}(x)$, и, выполняя простые преобразования, находим:

$$\tilde{y}_S(x) = \left(\sum_{i=1}^{S} c_i^{-1} y_i \hat{O}\left(\frac{x - x_i}{c_i}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{S} c_i^{-1} \hat{O}\left(\frac{x - x_i}{c_i}\right)\right) - \tilde{y}_{S-1}(x) + \tilde{y}_{S-1}(x)$$

и далее получим:

$$\tilde{y}_S(x) = \tilde{y}_{S-1}(x) - \alpha_S^{-1} c_S^{-1} \left(\tilde{y}_{S-1}(x) - \tilde{y}_S\right) \hat{O}\left(\frac{x - x_S}{c_S}\right), \qquad (3)$$

$$\alpha_S = \alpha_{S-1} + c_S^{-1} \Phi\left(\frac{x - x_i}{c_S}\right), \alpha_0 = 0. \qquad (4)$$

Таким образом, рекуррентная непараметрическая функция регрессии имеет форму (3), (4).

Рассмотрим вычислительные эксперименты.

Пусть истинная зависимость $y = F(x)$ имеет вид $y = 2\sin x$, где $x \in [0, 3]$. Далее используем эту зависимость для формирования обучающей выборки, искажая при этом y случайной 5%-ой помехой, $y_i = y_i + \alpha y_i h_i$, где $\alpha = 0.05$, $h_i \in [-1, 1]$. В качестве

$\Phi\left((x - x_i)/c_i\right)$ используем треугольное ядро. Таким образом, получена следующая обучающая выборка $\left(x_i, y_i, i = \overline{1, s}\right)$, где $x_i \in [0, 3]$. Параметр размытости для рекуррентной оценки функции регрессии c_i определяется по формуле: $c_i = A/\sqrt[3]{i}$ или $c_i = A/\sqrt[4]{i}$, где $i = 1, 2, \ldots, 100$; и A любое число. Для обычной оценки регрессии примем $c_S = 0.02$. Для экспериментов возьмем объем выборки $s = 100$. В первом случае примем аргумент постоянным $x = 2$, $A = 1.6$ (рис.1). Из рисунка 1 видно, что непараметрическая оценка функции регрессии приближается к исходной функции, обычная оценка функции регрессии точно проходит по истинной функции.

Во втором случае аргумент x меняется по формуле:

$x_i = 1.5\sin(0.01i)$, $c_i = A/\sqrt[4]{i}$, $A = 0.5$ (рис.2). Из рисунка 2 видно, что непараметрическая оценка функции регрессии медленно приближается к истинной функции, обычная оценка функции регрессии практически точно повторяет изменение функции. В третьем случае x_i, $i = \overline{1,100}$ принимает случайные значения из интервала $[0, 3]$, $c_i = A/\sqrt[4]{i}$, $A = 0.5$ (рис.3). Из рисунка 3 видно, что использование непараметрической рекуррентной оценки функции регрессии приводит к неудовлетворительным результатам, обычная оценка функции регрессии показывает практически точные результаты.

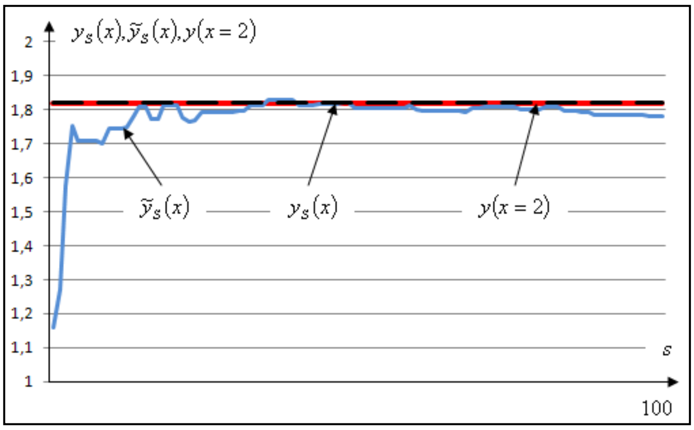

Рис. 1

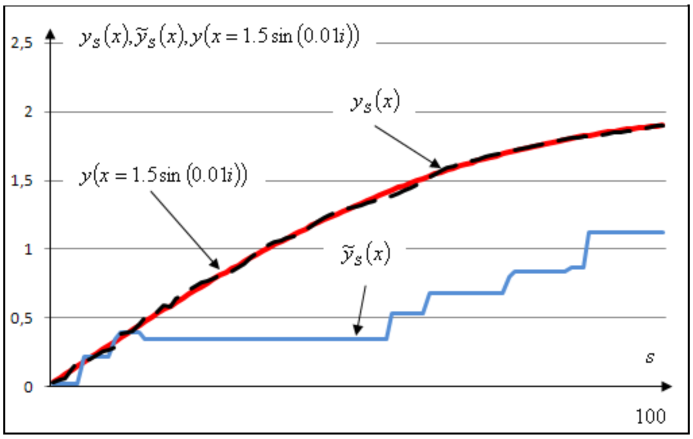

Рис. 3

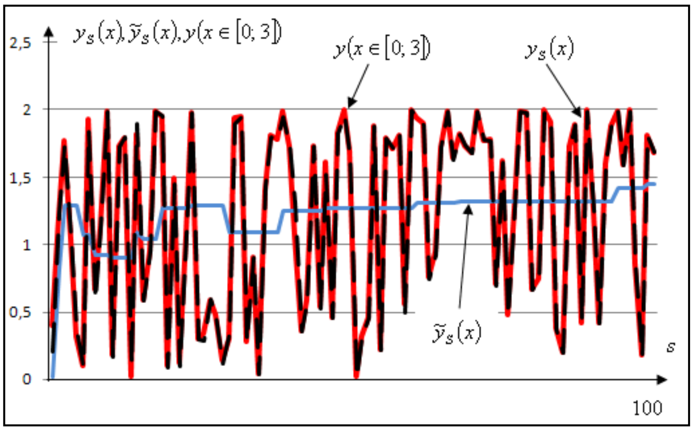

Рис. 2

Выводы. Численные исследования непараметрических рекуррентных оценок показали, что в случае, если x принять постоянным, то оценка приближается к истинному значению. Но при решении практических задач это редкий случай. Обычно x меняется по некоторой траектории или случайным образом. В этом случае применение рекуррентных оценок оказывается неэффективным.

Непараметрическое управление безынерционными системами. На рисунке 4 представлена схема управления процессом в случае, когда на вход объекта управления действует неуправляемая, но контролируемая переменная $\mu(t)$. Такую переменную можно выявить практически для любого процесса, при детальном его изучении. В этом случае задача управления усложняется, поскольку необходимо вырабатывать управляющее воздействие $U(t)$ с учетом поведения переменной $\mu(t)$ [3]. На рисунке 4 приняты следующие обозначения: А – неизвестный оператор объекта, $U(t)$– управляющее воздействие, $x(t)$ – выходная переменная объекта, $x^*(t)$ – задающее воздействие, $\xi(t)$– случайная помеха, H^x, H^U – блоки контроля «входных-выходных» переменных, h^x, h^U – случайные помехи, действующие в каналах измерения. Рассмотрим алгоритм, реализующий управления данным процессом:

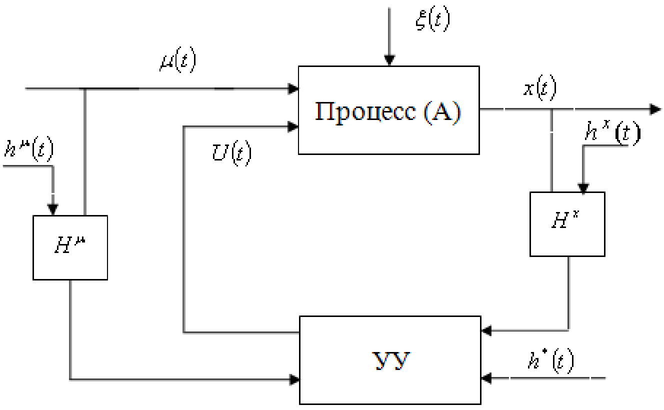

Рис. 4

1. Генерируются выборки $\mu_i, i=\overline{1,s}$ и $x_i^*, i=\overline{1,s}$ по заданному исследователем закону. На вход объекта подается U_0 (задается исследователем) и μ_0. Рассчитывается $x_0 = f(U_0, \mu_0)$. На следующем такте поступает μ_1 и x_1^* (μ_{S+1} и x_{S+1}^*) и необходимо выработать управляющее воздействие U_{S+1} и рассчитать выход x_{S+1}.

2. Производится расчет коэффициента размытости ядра по переменной $\mu(t)$. Для этого рассчитываются $\Delta\mu_i = |\mu_{S+1} - \mu_i|, i=\overline{1,s}$ и по этому показателю находится значение $\mu_{\min}$ наиболее близкое к μ_{S+1}. Коэффициент размытости ядра по переменной $\mu(t)$ рассчитывается по формуле: $cs^\mu = \alpha|\mu_{S+1} - \mu_{\min}|$, где коэффициент $\alpha > 1$.

3. Из всей выборки объема s находятся точки, удовлетворяющие условию $\frac{\mu_{S+1} - \mu_i}{cs^\mu} < 1$, т.е. точки, попавшие под колокол переменной $\mu(t)$. Далее алгоритм работает только с этими точками. Обозначим их как (μ_i', U_i', x_i').

4. Расчет коэффициента размытости ядра по переменной $x(t)$. Для этого рассчитываем величину $\Delta x_i = |x_{S+1}^* - x_i'|, i=\overline{1,s}$ и по этому показателю находим значение $x_{\min}$ наиболее близкое к x_{S+1}^*. Коэффициент размытости ядра по переменной $x(t)$ рассчитывается по формуле: $cs^x = \beta|x_{S+1}^* - x_{\min}|$, где коэффициент $\beta > 1$.

5. Находится поисковый шаг $\Delta U_{S+1} = \gamma(x_{S+1}^* - x_{\min})$, где коэффициент $\gamma < 1$.

6. Рассчитывается управляющее воздействие U_{S+1} по формуле:

$$U_{S+1} = \frac{\sum_{i=1}^{s} U_i' \hat{O}\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i'}{cs^x}\right)\hat{O}\left(\frac{\mu_{s+1} - \mu_i'}{cs^\mu}\right)}{\sum_{i=1}^{s} \hat{O}\left(\frac{x_{s+1}^* - x_i'}{cs^x}\right)\hat{O}\left(\frac{\mu_{s+1} - \mu_i'}{cs^\mu}\right)} + \Delta U_{S+1}. \quad (5)$$

7. Находится значение выхода: $x_{S+1} = f(U_{S+1}, \mu_{S+1})$. Алгоритм повторяется с пункта 2.

Численное исследование. В качестве зависимости выхода от входов примем уравнение вида:

$$x(t) = 2\sqrt{U(t)} + \mu(t). \qquad (6)$$

Переменная $\mu(t)$ описывается следующей зависимостью:

$$\mu(t) = \sin(0.015i). \qquad (7)$$

Задание примем константе: $x^*(t) = 6$. Параметры принимают следующие значения: $\alpha = 2.8; \beta = 1.1; \gamma = 0.6; U_0 = 4$. Полученные результаты представлены на рисунке 5.

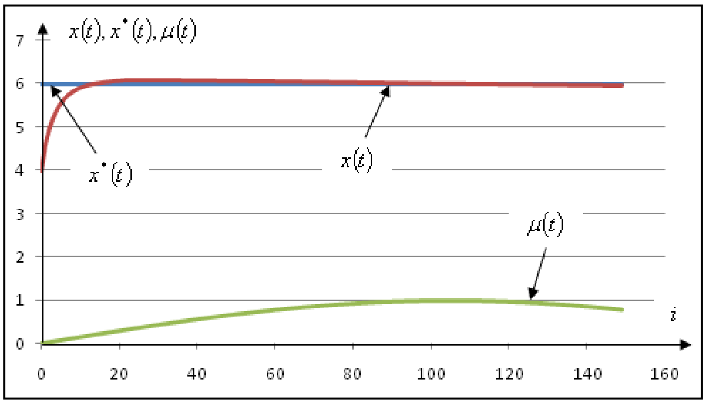

Рис. 5

Рассмотрим, как повлияет на работу алгоритма изменение величины коэффициента γ при поисковом шаге. Примем $\gamma = 0.2$. Результаты представлены на рисунке 6. Скорость настройки значительно уменьшилась. Если при $\gamma = 0.6$ алгоритм приводил $x(t)$ к области задания $x^*(t)$ уже на 20 итерации, то при $\gamma = 0.2$ это уже 100-я итерация. Увеличим значение $\gamma = 0.9$. Результаты приведены на рисунке 7.

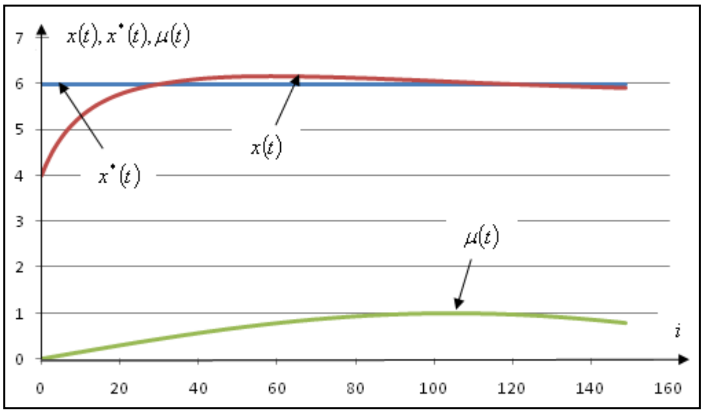

Рис. 6

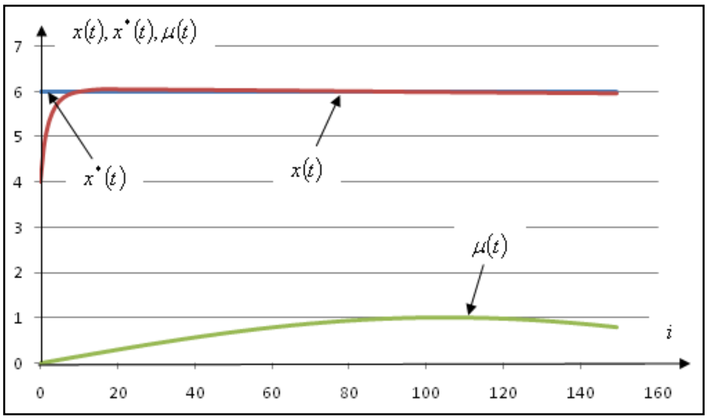

Рис. 7

Выводы. Численные исследования показали, что увеличение коэффициента γ при поисковом шаге увеличивает скорость настройки алгоритма.

Библиографические ссылки:

1. Надарая Э.А. Непараметрическое оценивание плотности вероятностей и кривой регрессии. – Тбилиси, издательство Тбилисского Университета, 1983. 194 с.

2. Медведев А.В. О рекуррентных непараметрических алгоритмах адаптации/ Материалы XV-ой Международной конференции «Решетневские чтения»// Красноярск: изд-во СибГАУ, 2011. – с. 473-474.

3. Медведев А.В. Непараметрические системы адаптации. – Новосибирск: Наука, 1983.