

**МОДЕРНИЗАЦИЯ КОМПЛЕКС-МЕТОДА ДЛЯ ЗАДАЧ РОБОТОТЕХНИКИ**

Голуб А.А.,

научный руководитель канд. техн. наук Масальский Г.Б.

*Сибирский федеральный университет*

Рассмотрим задачу поиска условного экстремума целевой функции в выпуклой допустимой области:

$$Q(\mathbf{x}) \rightarrow \underset{\mathbf{x} \in X}{extr}, \quad (1)$$

где  $X = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E^n, \mathbf{q}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}\}$ ,  $\mathbf{q}(\mathbf{x})$  и  $\mathbf{b}$  –  $m$ -мерные вектор-столбцы ограничений задачи,  $E^n$  –  $n$ -мерное евклидово пространство,  $\mathbf{x}$  – вектор управляемых переменных.

Для решения задачи (1) разработано достаточно много методов как градиентных, так и методов прямого поиска, представленных процедурой

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{x}(k) + \Delta\mathbf{x}(k), \quad (2)$$

где  $\mathbf{x}(k+1)$ ,  $\mathbf{x}(k)$  – значения вектора  $\mathbf{x}$  на  $(k+1)$ -ом и  $k$ -ом шагах поиска соответственно,  $\Delta\mathbf{x}(k)$  – вектор поправок на  $k$ -ом шаге поиска.

Среди методов прямого поиска можно выделить комплексный метод [1].

Комплекс-метод не требует непрерывности функций, так как не использует значений производных, но необходимо, чтобы допустимая область была выпуклой. Для невыпуклых областей комплекс-метод не гарантирует сходимости.

Комплекс-метод в отличие от детерминированных поисковых методов содержит на первом этапе организации поиска элемент случайности при формировании исходного комплекса, что предопределяет направление движения из исходного состояния.

Уравнение метода на  $k$ -ом шаге имеет вид

$$\mathbf{x}_r(k) = (1 + \alpha)\mathbf{x}_0(k) - \alpha\mathbf{x}_s(k), \quad (3)$$

где  $\mathbf{x}_r$  – новая отраженная точка комплекса,  $\mathbf{x}_s$  – худшая отражаемая точка комплекса,  $\mathbf{x}_0$  – центр тяжести уже принятых точек комплекса,  $\alpha$  – коэффициент растяжения.

Обобщенно алгоритм поиска комплекс-метода состоит в следующем.

Формируется первичный «комплекс» из  $l=2n$  вершин. Если вершина «комплекса» не удовлетворяет ограничениям, то она смещается к центру тяжести  $\mathbf{x}_0$  уже принятых вершин. После чего происходит вычисление целевой функции для всех вершин «комплекса». В ходе сортировки полученных значений выбирается худшая вершина  $\mathbf{x}_s$ , которая отражается относительно центра тяжести  $\mathbf{x}_0$  остальных точек комплекса.

При этом каждая точка проверяется на допустимость, и если какое-нибудь ограничение нарушено, то она смещается в область поиска. После вычисления значения целевой функции в новой вершине принимается решение о продолжении поиска, если шаг удачен, либо о смещении новой точки в сторону центра тяжести в противном случае.

Параметр  $\alpha$  обеспечивает рост скорости движения в направлении цели в геометрической прогрессии или быстрое сжатие в случае неуспеха.

Начальное направление движения комплекса зависит от его первичной ориентации. Как показали результаты исследований на плоскости, имитирующей поиск вдали от экстремума, комплекс движется в направлении увеличения значений функции (при поиске максимума), но не гарантирует большой эффективности поиска (рис. 1).

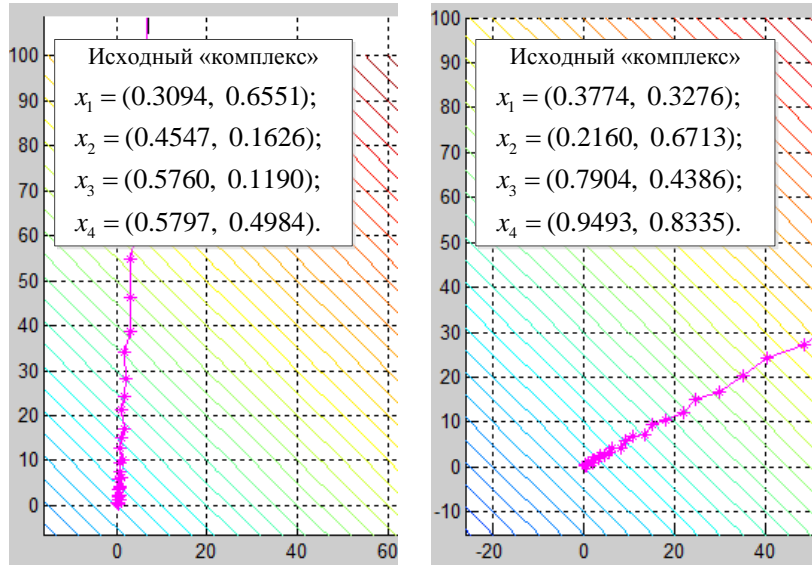


Рисунок 1 – Зависимость направления движения «комплекса» от исходной конфигурации (на плоскости)

Поэтому предлагается корректировать вектор поправок движения, используя направление *оценки* градиента целевой функции.

На каждом шаге поиска целевую функцию можно представить в виде:

$$Q(k) = \mathbf{a}^T(k)\mathbf{x}(k), \quad (4)$$

где  $\mathbf{a}$  - вектор неизвестных параметров (коэффициентов) модели.

Применительно к комплекс-методу, вектор параметров  $\mathbf{a}$  определяет наклон гиперплоскости, которой можно аппроксимировать участок целевой функции в области текущего «комплекса».

Другими словами, вектор  $\mathbf{a}$  можно назвать косвенной оценкой градиента в текущей точке поиска.

В ходе исследований для более точного определения параметров модели был принят рекуррентный метод наименьших квадратов в приращениях, процедура которого имеет следующий вид

$$\mathbf{a}(k) = \mathbf{a}(k-1) + \frac{\mathbf{C}(k-1)\Delta\mathbf{x}(k)}{1 + \Delta\mathbf{x}^T(k)\mathbf{C}(k-1)\Delta\mathbf{x}(k)} \left[ \Delta Q(k) - \mathbf{a}^T(k-1)\Delta\mathbf{x}(k) \right], \quad (5)$$

$$\mathbf{C}(k) = \mathbf{C}(k-1) - \frac{\mathbf{C}(k-1)\Delta\mathbf{x}(k)\Delta\mathbf{x}^T(k)\mathbf{C}(k-1)}{1 + \Delta\mathbf{x}^T(k)\mathbf{C}(k-1)\Delta\mathbf{x}(k)}, \quad (6)$$

где  $\Delta\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(k-1)$ ,  $\Delta Q(k) = Q(k) - Q(k-1)$ ,  $k$  – номер текущего шага поиска.

Рассмотрим эффективность вышеуказанного метода на примере задачи

$$Q(\mathbf{x}) = -(x_1 - 50)^2 - (x_2 - 50)^2 \rightarrow \max_{\mathbf{x} \in X}.$$

На рис. 2 представлен процесс вычисления оценок  $\mathbf{a}(k)$  в ходе поиска оптимума. Из рисунка заметно, что при приближении к экстремуму оценки  $\mathbf{a}(k)$  не стремятся к нулевым значениям (в отличие от истинных значений градиента). Этот эффект вызван тем, что процедура РМНК для вычисления каждой новой оценки использует всю предысторию предыдущих оценок, замедляя тем самым изменение значений оценок.

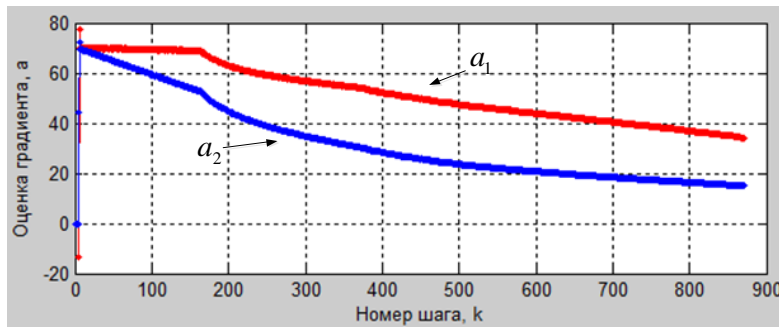


Рисунок 2 – Косвенные оценки градиента в ходе поиска экстремума с полной предысторией

Чтобы уйти от влияния предыдущих оценок, периодически (перед процедурой РМНК) можно присваивать оценкам нулевые значения, например, на каждой итерации поиска. Но, учитывая переходный процесс подстройки оценок параметров модели к установившимся значениям, необходимо ежетапно вычислять новую оценку с учетом нескольких предыдущих.

Ниже представлен процесс вычисления оценок  $\mathbf{a}(k)$  с ежетапным обнулением. Учитывается предыстория оценок только текущего и предыдущего «комплексов».

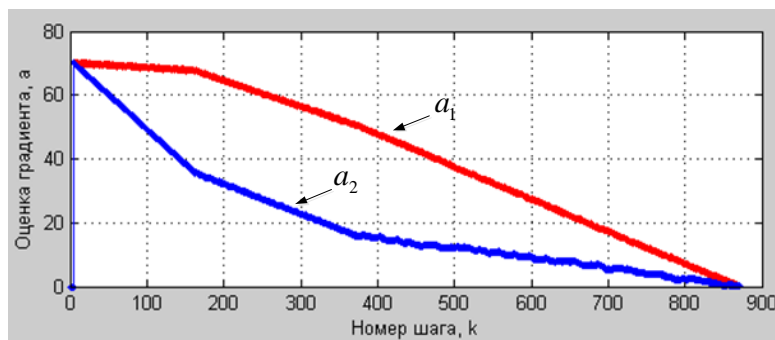


Рисунок 3 – Косвенные оценки градиента в ходе поиска экстремума с малой предысторией

На рис. 3 хорошо заметно, что при достижении экстремума, косвенная оценка градиента принимает нулевое (или близкое к нему) значение.

Можно сделать вывод, что с помощью данного варианта РМНК можно с достаточной точностью не только определять направление к экстремуму относительно текущей точки, но и меру близости до него.

Рассмотрим процедуру коррекции шага «комплекса» на направление косвенных оценок градиента.

Порядок выполнения операций следующий:

- 1) вычисление нормы вектора  $|\mathbf{a}(k)|$ :

$$|\mathbf{a}(k)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2(k)}, \quad (7)$$

где  $a_i(k)$  – коэффициенты модели, косвенная оценка градиента (процедура РМНК);

- 2) определение углов между вектором  $\mathbf{a}(k)$  и каждой  $i$ -ой проекцией на координатную ось

$$\alpha_i(k) = \arccos\left(\frac{a_i(k)}{|\mathbf{a}(k)|}\right), \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

Углы между вектором и его проекциями определяют его положение в пространстве переменных относительно координатных осей;

3) вычисление нормы вектора шага «комплекса»  $|\Delta \mathbf{x}(k)|$ :

$$|\Delta \mathbf{x}(k)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2(k)}, \quad (9)$$

где  $\Delta x_i(k) = x_{ri}(k) - x_{si}(k)$  – шаг «комплекса» по  $i$ -ой переменной;

4) новая скорректированная вершина

$$x_i^*(k) = x_{si}(k) + |\Delta \mathbf{x}(k)| \cdot \cos(\alpha_i(k)), \quad i = 1, \dots, n. \quad (10)$$

Полученные значения углов (8) используем для «поворота» вектора шага «комплекса»  $\Delta \mathbf{x}(k)$  на направление вектора оценок  $\mathbf{a}(k)$ . После чего определяем значение полученной скорректированной точки  $\Delta \mathbf{x}_r^*(k)$  в пространстве переменных.

Ниже представлены результаты применения процедуры коррекции в ходе поиска оптимума.

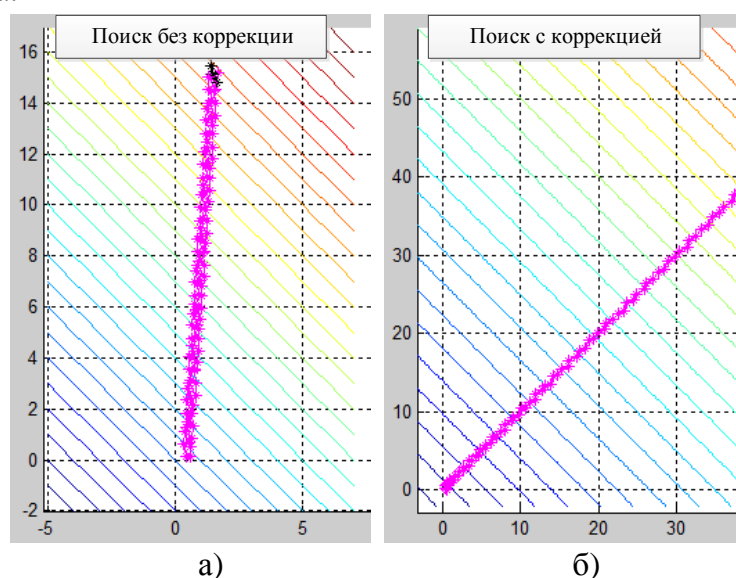


Рисунок 4 – Траектория движения «комплекса»: а) без применения процедуры коррекции; б) с применением процедуры коррекции

Результатам эксперимента показывают, что при коррекции каждого шага «комплекса» на направление косвенной оценки градиента эффективность поиска увеличивается и «комплекс» движется вдоль истинного градиента.

#### Список использованных источников

1. Банди, Б. Методы оптимизации. Вводный курс: Пер. с англ. / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с., ил.
2. Математические основы кибернетики: учеб. пособие / Г. Б. Масальский. – Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2012. – 196 с.
3. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах: Учеб. пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. – М.: Высш. шк., 2002. – 544 с.: ил.
4. Коршунов Ю. М. Математические основы кибернетики: Учеб. пособие для вузов. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – 496 с.: ил.
5. Кетков Ю. Л., Кетков А. Ю., Шульц М. М. MATLAB7: программирование, численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.: ил.