УДК 629.78.05

ПРОБЛЕМА РАСЧЕТА ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К УСТОЙЧИВОСТИ ВОЛНОВОДОВ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

Горохова Е.Ю., Гоцелюк О.Б., Барыкин Е.С.
научный руководитель канд. техн. наук Кудрявцев И.В.
Сибирский федеральный университет

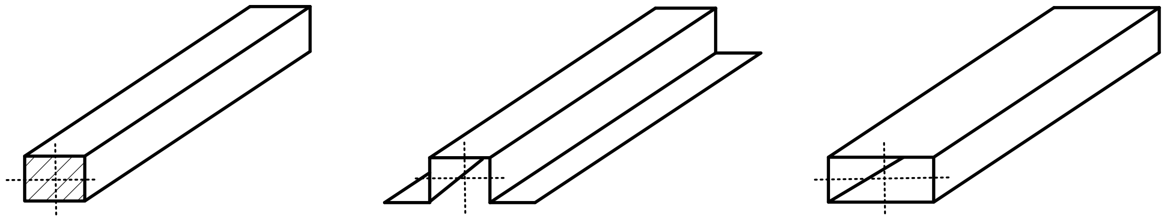
Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ № МК-257.2013.8

Строительство современных конструкций требует решения множества задач по обеспечению прочности, жесткости, устойчивости и надежности при одновременной оптимизации массы и стоимости системы.

В настоящее время в общем машиностроении, авиации, строительстве, железнодорожном транспорте и др. широко используются конструкции, элементами которых являются тонкостенные стержни, балки, пластинки и оболочки различных очертаний.

Использование тонкостенных конструкций требует правильного выбора их расчетной модели, учитывающей особенности работы исследуемой конструкции и дающей результаты, которые близки к реальному поведению системы, поскольку малая толщина стенки стержневых элементов изменяет их поведение под нагрузкой в отличие от стержней сплошного сечения. Это приводит к необходимости расширения существующих теоретических и экспериментальных знаний в соответствующих областях науки.

Существующие классические методы расчета на прочность, жесткость и устойчивость стержневых элементов конструкций не учитывают особенности формы их поперечного сечения, которое может быть как сплошным, так и с тонкостенным открытым или замкнутым профилем (рис.1).



а) сплошное *б) тонкостенное открытое* *в) тонкостенное замкнутое*

Рисунок 1 – Виды поперечного сечения стержней

Классическая теория стержней использует для их расчета ряд гипотез, которые существенно упрощают решения для большинства встречающихся на практике случаев расчета [1]. Однако, в случае применения стержней с тонкостенным профилем поперечного сечения использование вышеупомянутых гипотез приводит при расчетах к существенным ошибкам, которыми нельзя пренебречь.

Анализ теоретических предпосылок, на которых основана теория стержней сплошного сечения, позволяет выявить некорректности в используемых ей подходах для расчета тонкостенных конструкций.

Наиболее некорректными допущениями можно считать гипотезу Бернулли совместно с гипотезой о малости деформаций. Данные допущения говорят о недеформируемости формы и размеров поперечного сечения стержней, а также о том, что поперечные сечения, плоские и нормальные к оси стержня до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси после деформации.

Отсутствие деформаций контура сечения тонкостенного стержня существенно упрощает основные расчетные формулы теории стержней, делая все зависимости линейными и однозначными как при простых, так и при сложных случаях нагружения [1]:

$$\sigma_N = \frac{N}{S} \quad \sigma_M = \frac{M}{W} \quad \tau_M = \frac{M}{W_\rho} \text{ и др.} \tag{1}$$

Тонкостенным стержнем называется брус, все три измерения которого производятся величинами разных порядков, а именно: длина значительно преобладает над размерами контура поперечного сечения, а размеры контура преобладают над толщиной сечения.

В отличие от стержней сплошного сечения, имеющего в поперечных направлениях весьма высокую жесткость сечения, тонкостенный стержень можно представить в виде набора тонкостенных элементов, изгибная жесткость которых весьма мала. При воздействии на тонкостенный стержень поперечных нагрузок происходит весьма существенная деформация тонкостенных элементов, составляющих контур его сечения, в результате чего ей уже нельзя пренебречь при оценке его НДС.

Все вышеперечисленные факторы приводят к необходимости учета депланации поперечных сечений при расчете тонкостенных стержней. Математически, это означает нелинейную зависимость компонентов напряженно-деформированного состояния от внешних воздействий даже при простых случаях нагружения:

$$\sigma_N = \frac{N}{S(\sigma_N, \tau)} \quad \sigma_M = \frac{M}{W(\sigma_M, \tau)} \quad \tau_M = \frac{M}{W_\rho(\sigma, \tau_M)} \text{ и др.} \tag{2}$$

При этом направление внешних силовых факторов обычно таково, что приводит к снижению инерциальных характеристик сечения, которое, в свою очередь, ведет с росту значений компонентов напряженно-деформированного состояния согласно (2) и так по замкнутому циклу до само-уравновешивания системы.

Ситуация еще более усугубляется при появлении под нагрузкой в поперечных сечениях тонкостенных стержней касательных напряжений, уровень которых из-за малой толщины стенки будет существенно выше, особенно в случае открытого профиля сечения, чем в стержнях сплошного сечения. Поэтому наиболее критичным для тонкостенных стержней будет являться нагружение его крутящим моментом.

Такая специфика поведения тонкостенных конструкций под нагрузкой привела к выделению особой расчетной схемы, называемой тонкостенный стержень и соответствующей ему теории тонкостенных стержней.

В данной работе делается попытка выяснить, насколько различаются результаты расчетов при использовании классической теории стержней и с учетом особенностей их тонкостенной конструкций. Поскольку нелинейности (2) в поведении тонкостенных конструкций должны максимально проявляться при высоком уровне нагрузок, то рассмотрим нашу задачу применительно к потере устойчивости тонкостенных стержней. Рассмотрим наиболее простой из встречающихся случаев потерю устойчивости стержня под действием продольной силы.

Классическая теория стержней [1,2] при анализе их устойчивости под действием продольной силы используют формулу Эйлера:

$$F_{кр} = \pi^2 \frac{EJ_{\min}}{\mu l}. \tag{3}$$

При выводе зависимости (3) предполагается, что стержень под действием критической продольной силы, теряет свою изначально прямолинейную форму на криволинейную, описываемую в зависимости от условий закреплений по закону синуса или косинуса (рис.2).

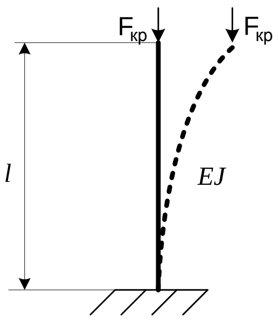


Рисунок 2 – Потеря устойчивости стержня сплошного сечения

Величина $J_{\min}$ (2) показывает, что изгиб стержня при потере устойчивости происходит в плоскости, соответствующей минимальному значению его изгибной жесткости. Коэффициент μ отражает условия закрепления стержня.

Потеря устойчивости тонкостенных стержней, в отличие от стержней сплошного сечения, начинается с локальной потери устойчивости в ходящих в его состав тонкостенного элемента. В результате этого резко изменяются инерциальные характеристики сечения (в сторону уменьшения) и следом происходит потеря устойчивости стержня в глобальном плане. Поэтому уравнения для тонкостенных стержней должны учитывать изменения контура их поперечного сечения.

Теория тонкостенных стержней Власова В.З. [3] опирается на гипотетическое положение так называемого жесткого контура: при предельной нагрузке в стенках возникает напряженное состояние, не вызывающее потери местной устойчивости стенок. Им замечено, что критическое напряжение в средней части тонкостенного стержня не вызывает потери его способности к дальнейшему восприятию нагрузок, если одна или более из его продольных граней остаются прямолинейными.

Для расчета устойчивости тонкостенных стержней Власов В.З. использует условия статического равновесия элементарной полоски стержня, на основе которых им получена следующая система дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &EI_y\cdot\xi^{IV}-\left[N\left(\xi'+a_y\,\theta'\right)\right]'+\left(M_x\,\theta\right)''=0;\quad EI_x\cdot\eta^{IV}-\left[N\left(\eta'+a_x\,\theta'\right)\right]'+\left(M_y\,\theta\right)''=0;\\ &EI_\omega\cdot\theta^{IV}-GI_d\theta''-\left[\left(r^2N+2\beta_yM_x-2\beta_xM_y+\beta_\omega B\right)\theta'\right]'+\\ &\qquad+\left[q_x\left(e_x-a_x\right)+q_y\left(e_y-a_y\right)\right]\theta-a_y\left(N\xi'\right)'+a_x\left(N\eta'\right)'+M_x\xi''+M_y\eta''=0. \end{aligned}\right\}\quad(4)$$

где θ, ξ, η - параметры, характеризующие депланацию сечения.

Система (4) учитывает взаимовлияние депланации сечения на НДС тонкостенного стержня. Однако ее решение значительно сложнее уравнений Эйлера (3).

Модель тонкостенного стержня Лещенко А.П. [4] построена на основе вариационного метода и его расчет также сводится к решению системы дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &(EF\zeta'-q_z z)'=0;\\ &\left(EJ_y\,\xi''\right)''-(q_z\,e_y)'-q_x=0;\qquad (G\bar{J}_d\,\bar{\theta}')'+m_*=0;\\ &\left(EJ_x\eta''\right)''+(q_z\,e_x)'-q_y=0;\qquad \left(EJ^*_\omega\tilde{\theta}''\right)''+(q_z\,w_c)'-m=0. \end{aligned}\right\}\quad(5)$$

Система дифференциальных уравнений (5) выведена в предположении, что угол закручивания тонкостенной конструкции состоит из суммы двух углов закручивания – угла кручения относительно центра чистого кручения $\bar{\theta}$ и угла кручения относительно центра свободного кручения $\tilde{\theta}$.

Анализ аналитических методов расчета устойчивости стержней показывает, что учет депланации сечения существенно затрудняет получение решения, поскольку связано с решением неоднородных дифференциальных уравнений, которые приводят к большому объему вычислений и часто теряется при этом ясность расчета.

Численные методы расчета получили в последнее время большое распространение (метод конечных разностей, метод конечных элементов и др), поскольку реализованные в различных программах, например, Ansys, Nastran и т.д., позволяют оперативно решать довольно сложные задачи.

Математически, расчет устойчивости в МКЭ выполняется динамическим методом и сводится к решению задачи на собственные значения, которая имеет вид [6]:

$$([K]+\lambda_i[S])\cdot\{\psi\}_i=\{0\}, \qquad (6)$$

Программа ищет такие нетривиальные (ненулевые значения) собственных чисел λ_i и собственных векторов $\{\psi\}_i$, которые соответствуют решению системы (6). В процессе решения внешняя нагрузка прикладывается ступенчато, на каждом из этапов решения НДС исследуемой конструкции определяются соответствующие изменения ее жесткости $[S]$, которые согласно уравнения (6), учитываются в матрице жесткости $[K]$.

Полученные N собственных чисел и собственных векторов для системы (1) будут соответствовать множителям внешней нагрузки и форме потери устойчивости соответственно.

Преимуществом расчета устойчивости методом МКЭ является простота постановки задачи, соответствие геометрии исследуемой конструкции ее действительным размерам со всеми геометрическими и физическими неоднородностями, которые при аналитическом расчете сильно затрудняют решение.

Недостатками являются сильная зависимость точности решения от вида используемого конечного элемента, его функции формы и корректности КЭ-сетки. Дело в том, что МКЭ ищет решение нелинейных зависимостей (2) путем решения линейной системы (6). В результате для получения точных решений требуется гораздо больше конечных элементов, чем при решении статических задач. Это ограничение требует применения высокопроизводительных ЭВМ с большим объемом памяти.

Также, для численных методов остается проблемой верификация точности полученного результата, поскольку он, как правило, существенно отличается от значений, полученных аналитическими методами, а экспериментальная проверка затруднительна или даже невозможна.

Так, нами были использованы аналитические и численные методы для расчета устойчивости прямых тонкостенных элементов волноводов космических аппаратов связи при различных вариантах закрепления. Полученные результаты для критической силы отличались в 3-7 раз в сторону уменьшения для тонкостенных стержней, что подтверждает значимость учета депланации сечения.

Библиографический список

1. Дарков А.В. Сопротивление Материалов - М.: Высшая школа, 1975. – 655с.
2. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.
3. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни. – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. – 568с.
4. Бычков Д.В. Строительная механика стержневых тонкостенных конструкций. – М.: 1962. – 478с.
5. Лещенко А.П. Фундаментальная строительная механика упругих систем, М.: 2008 – 546с.
6. *Ray E. Clough.* Dynamics of Structures, McGraw-Hill, 3th ed. New York, 1995. P. 752.