УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ МОСТОВОГО КРАНА

Лопатина А.А.
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Еркаев Н. В.
Сибирский федеральный университет

Краном мостового типа называется кран с грузозахватным устройством, подвешенным к грузовой тележке, которая перемещается по подвижной стальной конструкции (мосту). Этот кран активно применяют в области строительства, в цеховом производстве, в заводском производстве и на складских терминалах.

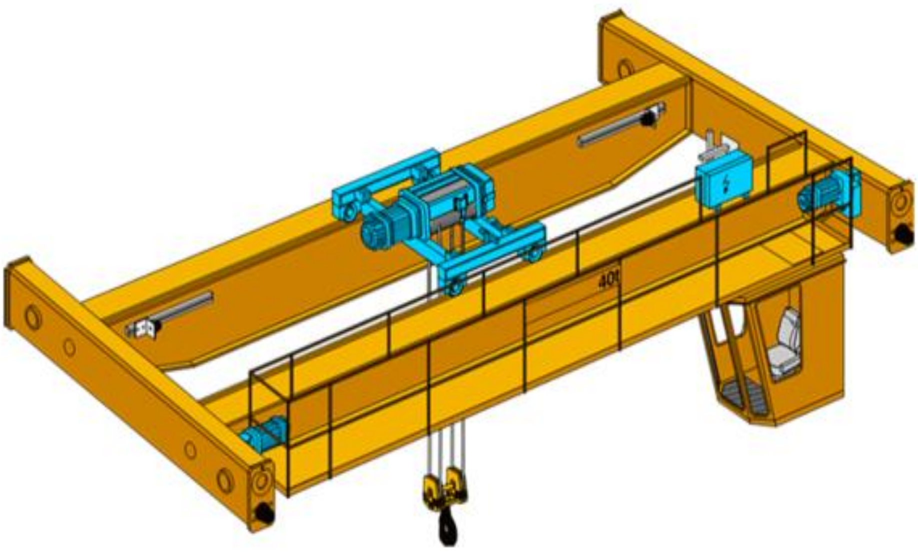

Рис. 1. Кран мостовой двухбалочный

Создание перспективных конструкций мостовых кранов требует хорошей проработки информации по конструкциям и параметрам мостовых кранов, разновидности конструкции, узлов и деталей, а также расчета поведения конструкции на определенное воздействие нагрузки в заданный момент времени. Установлено, что перемещения балки мостового крана могут быть описаны дифференциальным уравнением движения балки, нагруженной распределенной нагрузкой $Q(x,t)$:

$$EJ\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + m_0\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = Q(x,t) \tag{1}$$

Здесь EJ- изгибная жесткость материала, m_0- масса единичного участка, $Q(x,t)$ - сила тяжести тележки.

Вводим безразмерные переменные:

$$t = \tilde{t}t^*, x = l\tilde{x} \tag{2}$$

где $t^* = \sqrt{\frac{m_0 \cdot l^4}{EJ}}$ (l- длина балки).
Получим уравнение в виде:

$$\tilde{J}\,\frac{\partial^4 W}{\partial \tilde{x}^4} + \widetilde{m}_0 \frac{\partial^2 W}{\partial \tilde{t}^2} = \tilde{Q}\,(x,t) \qquad (3)$$

здесь $\tilde{Q}(x,t) = Q(x,t)\,\frac{t^{*2}}{m_0}$.

В дальнейшем мы рассматриваем только безразмерное уравнение колебаний, и знак волны над безразмерными переменными опускаем для простоты.
Для построения конечномерной модели балки используем уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}$$

где T- кинетическая энергия, Π – потенциальная энергия, которые нашем случае равны:

$$T = \frac{1}{2}\int_0^l m_0 \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 dz \qquad \Pi = \frac{1}{2}\int_0^l EJ \cdot \left(\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}\right)^2 dz$$

Применяя конечноразностную аппроксимацию, разбиваем балку на N равных участков и записываем кинетическую и потенциальную энергии в виде конечных сумм:

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} \Delta\widetilde{m}_i \cdot \dot{x}_i^{\,2} \qquad \Pi = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N}\left[\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta l^2}\right]^2 \widetilde{J}_i \Delta l$$

Здесь Δl- длина малого участка разбиения, равная $\frac{l}{N}$.

Подставляя выражения кинетической и потенциальной энергий в уравнение Лагранжа, получаем конечномерные уравнения:

$$\Delta\widetilde{m}_i \cdot \ddot{x}_i = -\frac{1}{\Delta l^4}\left[-2x_{i+1}(\tilde{J}_i + \tilde{J}_{i+1}) + x_i(4\tilde{J}_i + \tilde{J}_{i-1} + \tilde{J}_{i+1}) - 2x_{i-1}(\tilde{J}_i + \tilde{J}_{i-1}) + x_{i-2} \cdot \tilde{J}_{i-1} + x_{i+2} \cdot \tilde{J}_{i+1}\right] + \tilde{Q}\,(x,t) \qquad (4)$$

Здесь индекс i – номер участка разбиения.

Система уравнений (4) интегрировалась численно с использованием пакета MATHCAD для N = 10 при краевых условиях заделки:

$$x_0 = 0,\ x_1 = 0\,,\ x_{N-1} = 0,\ x_N = 0 \qquad (5)$$

Результаты расчетов представлены на рис. 2, 3.

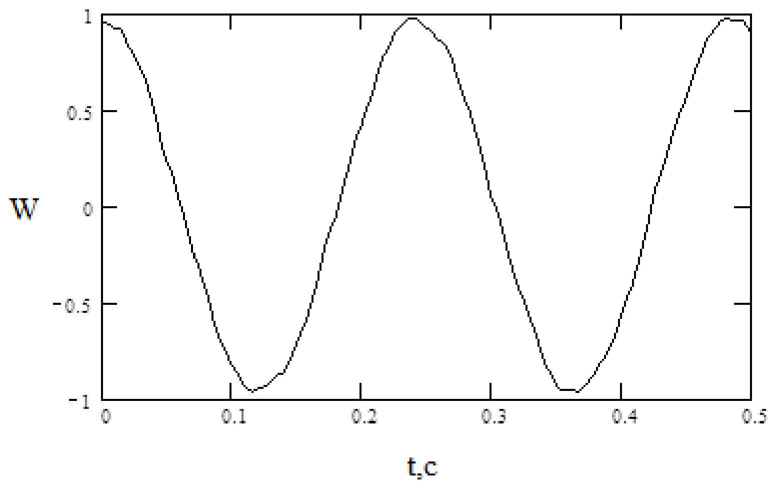

Рисунок 2 – Зависимость от времени средней точки балки

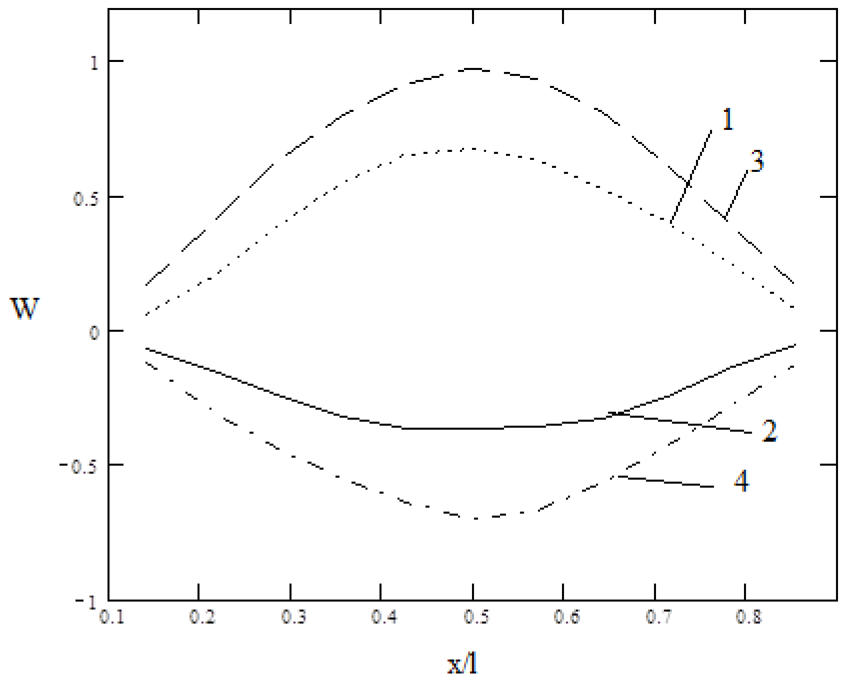

Рисунок 3 – Распределение прогиба по длине балки в разные моменты времени: 1– при t=0,02 с, 2 – при t=0,11 с, 3 – при t=0,17 с, 4– при t=0,22 с.

Выводы. На основе уравнения Лагранжа второго рода построена математическая модель колебаний балки с переменной массой и нагрузкой. Выполнены численные расчеты в MATHCAD и получена функция прогиба балки в зависимости от времени. Объектом приложения разработанной модели является балка мостового крана, применяющаяся в колесном цехе электровагоноремонтного завода для перемещений колесной пары. Модель позволяет оценить имеющиеся наблюдения и дает адекватную оценку поведения конструкции при определенном воздействии нагрузки в заданный момент времени.