

К ВОПРОСУ ОБ ИЗМЕРЕНИИ РАДИУСА КРИВИЗНЫ ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ МЕХАНИЧЕСКИМ СПОСОБОМ

Щемелев А.А., Потылицына А.И.

Научный руководитель канд. техн. наук Секацкий В.С.

Сибирский федеральный университет

Для измерения радиусов кривизны сферических поверхностей деталей применяют разнообразные методы и средства, выбор которых в каждом конкретном случае определяется величиной измеряемого радиуса, габаритами детали, требуемой точностью и производительностью измерений.

Оптические детали со сферическими поверхностями (линзы, зеркала) являются широко распространенными элементами оптических систем. Качество изображения, даваемого оптическими системами, во многом зависит от того, насколько точно соответствуют расчетным значениям радиусы кривизны сферических поверхностей, полученные при обработке деталей.

Очень важно измерение кривизны профиля крыла самолета. Под кривизной профиля крыла обычно понимают кривизну его средней линии. Кривизна профиля один из основных геометрических параметров несимметричного профиля.

Также радиус кривизны имеет свое отражение в волоконной оптике. Максимальный изгиб кабеля является еще одним важным параметром, который характеризует предельно допустимый радиус кривизны укладки кабеля.

Радиус кривизны является одним из важнейших параметров при изготовлении лезвий фигурных коньков, особенно для профессионального спорта, при изготовлении лопастей летательных аппаратов и средств передвижения по воде (под водой).

Анализ средств измерений радиусов кривизны позволяет их распределить на три группы: геометрические методы и средства измерений, оптические и механические.

Механические методы измерений мало изучены, а конкретные средства измерений на их основе отсутствуют. В настоящее время известны способ определения радиуса внутренней цилиндрической поверхности с помощью качающегося валика [1] или с помощью качающегося шарика по сферической поверхности [2].

Более подробно рассмотрим механизм измерения радиуса с помощью качающегося шарика.

Радиус кривизны R гладкой сферической поверхности можно определить, измерив период колебания T шарика, катающегося по этой поверхности (рис. 1).

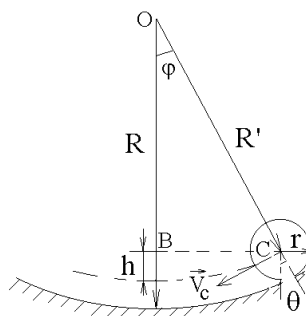


Рис. 1. Схема движения шарика, катающегося по поверхности.

Если пренебречь потерями энергии, затрачиваемой на преодоление диссипативной силы трения, то для катающегося без проскальзывания шарика должен выполняться закон сохранения механической энергии. Центр масс C шарика движется поступательно, но, кроме того, шарик вращается относительно оси z , проходящей через точку C перпендикулярно плоскости (рис. 1). Поэтому полная механическая энергия шарика

$$E = \frac{mV_c^2}{2} + \frac{J_c\omega^2}{2} + mgh = const, \quad (1)$$

где m – масса шарика;

$J = \frac{2}{5}mr^2$ - его момент инерции относительно оси z ;

r – радиус шарика.

Модуль угловой скорости ω шарика вокруг оси z связан с модулем скорости V_c поступательного движения центра масс соотношением

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{V_c}{r}. \quad (2)$$

Подставляя (2) и выражение для J_c в (1), получаем

$$E = \frac{7}{10}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgh = const. \quad (3)$$

Но при качении шарика по сферической поверхности его центр масс отклоняется относительно центра O поверхности на угол φ . Из рис.1 видно, что угол φ связан с углом поворота θ шарика относительно оси z соотношением

$$\theta = \frac{R'}{r}\varphi \quad (4)$$

где $R' = R - r$. Кроме того, из прямоугольного треугольника OBC следует, что

$$h = R' - R'\cos\varphi. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в формулу (3), выражаем полную механическую энергию шарика через угол φ :

$$E = \frac{7}{10}m(R')^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + mgR'(1 - \cos\varphi) = const. \quad (6)$$

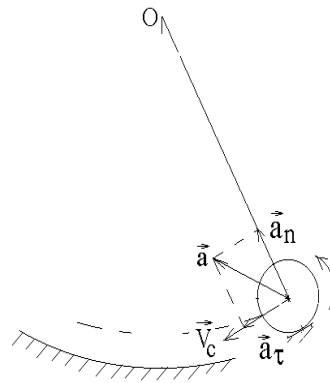


Рис. 2. Кинематика движения шарика

В верхней точке траектории скорость шарика равна нулю и вся механическая энергия шарика переходит в потенциальную. При прохождении шариком положения равновесия ($h=0$) скорость и кинетическая энергия шарика максимальны.

Рассмотрим кинематику движения шарика. Скорость \vec{V}_c его центра масс C всегда направлена по касательной к траектории (рис. 2). Полное ускорение \vec{a} центра масс равно сумме тангенциального \vec{a}_τ и нормального \vec{a}_n ускорений. Ускорение \vec{a}_τ направлено также по касательной к траектории. Его модуль связан с модулем углового ускорения вращения шарика вокруг оси z формулой

$$a_\tau = r \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (7)$$

Ускорение \vec{a}_n направлено к центру кривизны. Его модуль

$$a_n = \frac{V_c^2}{R'}. \quad (8)$$

Эти модули изменяются при колебательных движениях шарика периодически. В верхней точке траектории при наибольшем отклонении шарика от положения равновесия V_c шарика и a_n равны нулю, а a_τ достигает максимума. При прохождении положения равновесия, наоборот, $a_\tau = 0$, а V_c и a_n максимальны.

Найдем период колебаний шарика. Для этого необходимо получить динамическое уравнение колебаний (т.е. уравнение динамики для поступательного или вращательного движения колеблющегося шарика). Для любых незатухающих гармонических колебаний это уравнение имеет общий вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (9)$$

Физическое тело будет совершать гармонические колебания в том случае, если на него действует сила или момент силы, пропорциональные смещению от положения равновесия и стремящиеся вернуть тело в положение равновесия.

Воспользуемся законом сохранения механической энергии (6). Возьмем производную по времени от обеих частей этого уравнения, сократим полученное выражение на $mR'(d\varphi/dt)$ и приведем его к виду, аналогичному (9):

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{5}{7} \cdot \frac{g}{R'} \sin \varphi = 0. \quad (10)$$

Отсюда видно, что шарик будет совершать гармонические колебания относительно положения равновесия в том случае, когда $\sin \varphi \approx \varphi$. Т.е. условием гармонических колебаний в данной работе будут малые углы отклонения шарика от положения равновесия.

В этом случае угол φ изменяется по гармоническому закону $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha)$, где

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{5g}{7R'}}. \quad (11)$$

Используя выражения (4), (7) и (8), можно вычислить значения скорости и ускорения шарика в любой момент времени. Чтобы найти зависимость радиуса кривизны R сферической поверхности от периода T , которую находим из формулы (11), подставим в нее $R' = R - r$:

$$R = \frac{5}{7} g \frac{T^2}{4\pi^2} + r. \quad (12)$$

На практике вместо периода удобнее пользоваться частотой колебаний. Преобразуя формулу (12) получим зависимость частоты качания эталонного шарика радиусом r по измеряемой поверхности радиусом R .

$$f = \sqrt{\frac{5g}{28\pi^2(R-r)}} \quad (13)$$

На рис. 3 приведена зависимость частоты качания шарика от отношения радиусов шарика и измеряемой поверхности. Видно, что частота качания возрастает с уменьшением разности радиусов R и r . Однако такой относительный параметр не в полной мере отражает исследуемую зависимость. Так, на изменение частоты в большей степени будет влиять абсолютная разность радиусов. Например, одинаковое соотношение $r=0,9R$ при $R=500$ мм дает разность радиус в 50 мм, а при $R=20$ – всего в 2 мм. Поэтому частота качания различается в 4 с лишним раза.

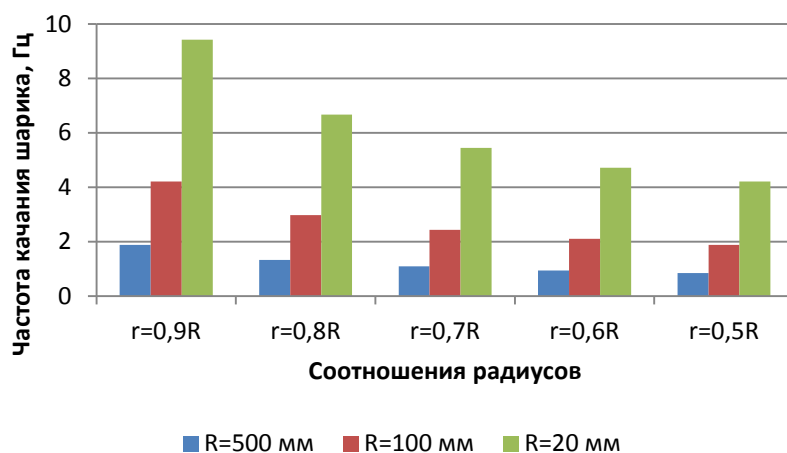


Рис. 3. Зависимость частоты качания шарика от разности радиусов эталона и измеряемой поверхности.

На первом этапе можно сделать вывод о том, при проектировании средств измерений, основанных на измерении частоты качания эталонного шарика по измеряемой криволинейной поверхности, разность радиусов необходимо выбирать из возможности средств измерения частоты для качающегося шарика. Для выбора их количественного соотношения можно пользоваться формулой (13) или графиком, приведенном на рис. 3.

Литература

1. Патент № 606093 СССР. Способ измерения радиуса отверстия / Р.И.Кутчер, В.С.Секацкий// 1978. – № 17.
2. Семина В.А. Физпрактикум. Механика //physics.tsu.tula.ru/bib/lab/3/lab-meh-all.pdf