УДК 517.55

О ВЫЧИСЛЕНИИ ВЫЧЕТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СВЫЗАННЫХ С СИСТЕМОЙ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Мышкина Е.К.,
научный руководитель доктор физ.-мат. наук, профессор Кытманов А. М.
Сибирский федеральный университет

Рассмотрим систему функций

$$f_i(z) = \left(z^{\beta^i} + \psi_i(z)\right) e^{P_i(z)}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

где $\beta^i = (\beta_1^i, \beta_2^i, \dots, \beta_n^i)$ – мультииндекс с целыми неотрицательными координатами,

$$z^{\beta^i} = z_1^{\beta_1^i} \cdot z_2^{\beta_2^i} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n^i};$$

$$\left\|\beta^i\right\| = \beta_1^i + \beta_2^i + \dots + \beta_n^i = k_i,$$

степени удовлетворяют условию $k_i \leq \deg \psi_i(z)$; $i = 1, \dots, n$, и мономы z^{β^i} не содержатся в $\psi_i(z)$, которые имеют вид

$$\psi_i(z) = \sum_{j=1}^{i-1} \varphi_{ij} + Q_i(z), \qquad i = 1, \dots, n,$$

где φ_{ij} – однородные полиномы степени $\left\|\beta^i\right\|$ и $deg_{z_j}\varphi_{ij} < \beta_j^i$, для $i = 2, \dots, n$; $j = 1, \dots, i-1$.

Функции $Q_i(z)$, $P_i(z)$ разлагаются в окрестности нуля в ряд Тейлора, сходящийся абсолютно и равномерно, вида

$$Q_i(z) = \sum_{\|\alpha\| > k_i} a_\alpha^i z^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geq 0$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, а $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot z_n^{\alpha_n}$. Степени всех мономов (по совокупности переменных), входящих в $Q_i(z)$ строго больше, чем k_i, $i = 1, \dots, n$ (т.е. $\|\alpha\| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n > k_i$).

$$P_i(z) = \sum_{\|\gamma\| > 0} b_\gamma^i z^\gamma,$$

где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, $\gamma_i \geq 0$, $\gamma_i \in \mathbb{Z}$.

А функция $f_i(z)$ удовлетворяет следующим условиям:
для первой функции f_1 степень k_1 строго меньше, чем степень функций ψ_1 и P_1, для остальных функций f_j степень k_j меньше либо равна степени функций ψ_j и P_j.
Далее, при фиксированном z_1 система функций $f_2, \dots, f_n$ удовлетворяет тем же условиям по переменным $z_2, \dots, z_n$ и так далее.
На последнем шаге при фиксированных $z_1, \dots, z_{n-1}$ для функции f_n степень по z_n монома β^n строго меньше степеней голоморфных функций ψ_n и P_n по переменной z_n.

Рассмотрим циклы $\gamma(r) = \gamma(r_1, \dots, r_n)$, являющиеся остовами поликругов $\Gamma(r) = \{|z_s| < r_s\}$, т.е.

$$\gamma(r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_s| = r_s, s = 1, \dots, n\}, \qquad r_1 > 0, \dots, r_n > 0.$$

Определим *вычетные интегралы* вида

$$\int\limits_{\gamma(r)} \frac{1}{z^{\beta+I}} \cdot \frac{df}{f} = \int\limits_{\gamma(r_1,\dots,r_n)} \frac{1}{z_1^{\beta_1+1} \cdot \dots \cdot z_n^{\beta_n+1}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

Обозначим через $\widetilde{f_J}$ функции $\widetilde{f_J}(z) = z^{\beta^j} + \psi_j(z),\ j = 1, \dots, n.$ Пусть J - мультииндекс порядка n, состоящий из s единиц и $n - s$ нулей ($s = 0, \dots, n$).
Введем обозначение: Δ_J - якобиан системы функций, таких что единице, стоящей на -ом месте из J соответствует строка в Δ_J из производных функции $\widetilde{f_J}$, а нулю, стоящему на k-ом месте в J соответствует строка в Δ_J из производных функции P_k.

Теорема 1. При сделанных предположениях для функций f_j, справедливы формулы:

$$J_\beta = \sum_J \sum_{\alpha^s} \frac{(-1)^{\|\alpha^s\|}}{(\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s})!} \times \frac{\partial^{l_s}(\Delta_J \cdot \psi_J^{\alpha^s})}{\partial z^{\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}}}_{z=0} =$$

$$= \sum_J \sum_{\alpha^s} (-1)^{\|\alpha^s\|} \mathfrak{M} \left[\frac{\Delta_J \cdot \psi_J^{\alpha^s}}{z^{\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}}} \right],$$

где α^s - мультииндекс порядка s, i_k – номер k – ой единицы в J, $l_s = \left\|\beta + (\alpha_1^s + 1)\beta^{i_1} + \dots + (\alpha_s^s + 1)\beta^{i_s}\right\|$, $\beta! = \beta_1! \cdot \dots \cdot \beta_n!$, $\psi_J^{\alpha^s} = \psi_{i_1}^{\alpha_1^s} \cdot \dots \cdot \psi_{i_s}^{\alpha_s^s}$, $\frac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z^\gamma} = \frac{\partial^{\|\gamma\|}}{\partial z_1^{\gamma_1} \dots \partial z_n^{\gamma_n}}$ и, наконец, $\mathfrak{M}$ - линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана свободный член.

Пусть теперь функции $f_j(z)$ - многочлен в $\mathbb{C}^n$. Функции $P_j(z)$ - многочлены вида

$$P_j(z) = \sum_{0 \le \|\gamma\| \le p_j} b_\gamma^j z^\gamma$$

и степени всех многочленов $P_j(z)$, входящих в систему, $\deg P_j(z) \le \rho$,
$j = 1, \dots, n,\ \ s = 1,2, \dots.$

Для $f_j(z)$сформулируем дополнительные предположения:

$$deg_{z_k}\psi_i \le \beta_k^l,\ \ k \ne i$$

$$deg_{z_k}Q_i \le \beta_k^l,\ \ k \ne i$$

$$deg_{z_k}\varphi_{ij} \le \beta_k^l,\ \ k \ne i$$

$$k = 1, \dots, n;\ \ \ i = 2, \dots, n;\ \ \ j = 1, \dots, n-1.$$

Обозначим

$$\sigma_{\beta+I} = \sigma_{(\beta_1+1, \dots \beta_n+1,)} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{z_{1(k)}^{\beta_1+1} \cdot \dots \cdot z_{n(k)}^{\beta_n+1}},$$

где $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ – некоторый мультииндекс.

Данное выражение является *степенной суммой* корней, не лежащих на координатных плоскостях нашей системы, но в отрицательной степени (либо степенной суммой от обратных величин корней), а M – число таких корней.

Теорема 2. Для системы функций $f_j(z)$, для которых в разложении степени всех P_j ограничены числом ρ и выполняется неравенство

$$l^1 + \dots + l^n \le \beta,$$

где $l^j = (l_1^j, \dots, l_n^j)$ и l_i^j - наибольшая степень -ого многочлена P_i по j-ой переменной z_j; $i, j = 1, \dots, n,$

справедливы формулы

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}.$$

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть функции $f_j(z)$ имеют вид

$$f_j(z)=\frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)},\quad j=1,\dots,n,$$

где $f_j^{(1)}(z)$ и $f_j^{(2)}(z)$ - целые функции в $\mathbb{C}^n$ конечного порядка роста не выше ρ, разлагающиеся в бесконечные произведения, равномерно и абсолютно сходящиеся на компакте в $\mathbb{C}^n$,

$$f_j^{(1)}(z)=\prod_{s=1}^{\infty}f_{j,s}^{(1)}(z),\qquad f_j^{(2)}(z)=\prod_{s=1}^{\infty}f_{j,s}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $(z^{\beta^{j,s}}+\psi_{j,s}(z))e^{P_{j,s}(z)}$, а $\psi_{j,s}(z)$ $P_{j,s}(z)$ функции, определенные ранее, и степени всех многочленов $P_{j,s}(z)$, входящих в систему, $\deg P_{j,s}(z)\le\rho,\quad j=1,\dots,n,\quad s=1,2,\dots.$

Обозначим через $\sigma_{\beta+I}$ выражение

$$\sigma_{\beta+I}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_l}{z_{1(l)}^{\beta_1+1}\cdot\ldots\cdot z_{n(l)}^{\beta_n+1}}.$$

Здесь $\beta_1,\dots,\beta_n$, как и прежде, неотрицательные целые числа, а знак ε_l равен $+1$, если в систему, корнем которой является $z_{(l)}$, входит четное число функций $f_{j,s}^{(2)}$; и равен -1, если в систему, корнем которой является $z_{(l)}$, входит нечетное число функций $f_{j,s}^{(2)}$.

Определим мультииндекс $l^j=\left(l_1^j,\dots,l_n^j\right)$, где l^j – максимальная из наибольших степеней всех многочленов $P_{j,s}$ по -ой переменной z_k; $j,k=1,\dots,n,\ s=1,2,\dots$, входящих в разложение.

Теорема 3. Для системы функций $f_j(z)$, для которых в разложении степени всех P_j ограничены числом ρ и выполняется неравенство

$$l^1+\dots+l^n\le\beta,$$

ряд сходится и справедливы формулы

$$J_\beta=(-1)^n\sigma_{\beta+I}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 12-01-00007-а