УДК 517.55

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ КОМПОЗИЦИИ АДАМАРА КРАТНЫХ РЯДОВ ЛОРАНА

Некрасова Т.И.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Лейнартас Е. К.
Сибирский федеральный университет

Одной из красивых теорем в теории распределения особенностей аналитических функций является теорема Адамара об умножении особенностей (см. [1]) для степенного ряда, коэффициенты которого являются произведением коэффициентов двух заданных рядов. Для кратных степенных рядов конструкции, обобщающие произведение Адамара рядов, появились в связи с решением некоторых задач теории чисел [2] и комбинаторного анализа [3]. Отметим также, что на многомерный случай классическая адамаровская композиция степенных рядов обобщалась в [5].Одна из этих конструкций – «диагональные» композиции Адамара двойного ряда восходит еще к Пуанкаре. В [4] диагонали двойного ряда изучались в связи с проблемой устойчивости цифровых рекурсивных фильтров.

В данной работе конструкция композиции Адамара распространяется на ряды Лорана с носителями в заостренных конусах. Для этой композиции указывается интегральное представление.

Конусом в $\mathbb{Z}^n$ будем называть множество K точек $\mathbb{Z}^n$, представимых линейной комбинацией s векторов $a^1, \dots, a^s \in \mathbb{Z}^n$ вида

$$K = \{ x: x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_s a^s, ;\ \lambda_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, s\},$$

где $\mathbb{Z}_+$ – целые неотрицательные числа.

Будем рассматривать симплициальные конусы, то есть такие, в которых каждый элемент выражается через образующие единственным образом.

Пусть даны два ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{\alpha \in K} c_\alpha z^\alpha,$$

$$g(z) = \sum_{\beta \in K} b_\beta z^\beta,$$

носители которых $\operatorname{supp} f = \{\alpha: c_\alpha \neq 0 \}$, $\operatorname{supp} g = \{\beta:\ b_\beta \neq 0\}$, лежат в конусе K.

Композицией Адамара двух кратных рядов Лорана с носителями в конусе K назовем ряд вида

$$f \circ g(z) = \sum_{\alpha \in K} c_\alpha b_\alpha z^\alpha$$

Для $n = 1$ и $K = \mathbb{Z}_+$ получим классическую композицию Адамара степенных рядов [1]. Прежде чем привести интегральное представление композиции $f \circ g(z)$ для кратных рядов Лорана, укажем для рядов Лорана в конусе аналог круга сходимости одномерного ряда (полицилиндра – для кратного ряда). Им является аналитический полиэдр вида $U_a(R) = \{\xi: | \xi^{a^i}| < R_i,\ i = 1, \dots, l\}$.

Теорема

Пусть ряд $f(z) = \sum_{\alpha \in K} c_\alpha z^\alpha$ сходится в аналитическом полиэдре $U_a(R) = \{\xi: | \xi^{a^i}| < R_i,\ i = 1, \dots, l\}$, а ряд $g(z) = \sum_{\beta \in K} b_\beta z^\beta$ в $V_a(\rho)$, тогда композиция рядов $f \circ g(z) = \sum_{\alpha \in K} c_\alpha b_\alpha z^\alpha$ сходится в $W_a(R\rho) = W_a(R_1\rho_1, \dots, R_l\rho_l)$ и для $z \in W_a(R\rho)$ справедливо интегральное представление

$$f \circ g(z) = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int\limits_{\Gamma} f(\xi) g\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi},$$

где $\Gamma = \{\xi: |\xi_j| = r_j, j = 1, \dots, n\}$, $\Gamma \subset U_a(R)$.

Доказательство.

Пусть $z \in W_a(R\rho) = \{\xi: |\xi^{a^i}| < R_i \rho_i, i = 1, \dots, l\}$, тогда мы можем выбрать такое r, что $|r_i| < |R_i|$ и $\frac{|z_i|}{|r_i|} < |\rho_i|$. Таким образом $\Gamma = \{\xi: |\xi_j| = r_j, j = 1, \dots, l\}$ будет лежать в области голоморфности подынтегральной функции, поэтому мы имеем право рассмотреть интеграл

$$\frac{1}{(2\pi i)^l} \int\limits_{\Gamma} f(\xi) g\left(\frac{z}{\xi}\right) \frac{d\xi}{\xi}.$$

Далее, подставляя вместо функций их разложения в ряды, сходящиеся равномерно на Г, перемножая и почленно интегрируя, получим

$$\frac{1}{(2\pi i)^l} \int\limits_{\Gamma} \left(\sum_{\alpha \in K} c_\alpha \xi^\alpha \right) \left(\sum_{\beta \in K} b_\beta \left(\frac{z}{\xi}\right)^\beta \right) \frac{d\xi}{\xi} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^l} \int\limits_{\Gamma} \left(\sum_{\alpha, \beta \in K} c_\alpha \xi^\alpha b_\beta \frac{z^\beta}{\xi^\beta} \right) \frac{d\xi}{\xi} = \sum_{\alpha \in K} c_\alpha b_\alpha z^\alpha .$$

Здесь мы также воспользовались следующим свойством

$$\frac{1}{(2\pi i)^l} \int\limits_{\Gamma} \xi^\alpha \frac{d\xi}{\xi} = \begin{cases} 0, \text{если } \alpha \neq 0, \\ 1, \text{если } \alpha = 0. \end{cases}$$

Приведем пример применения данной теоремы. Рассмотрим два ряда Лорана $F(z) = \sum_{x \in K} f(x) z^x$ и $F_m(z) = \sum_{x \in m+K} f(x) z^x$. Найдем связь между этими рядами, используя введенную нами композицию Адамара. Эта задача появляется в связи с применением в теории многомерных разностных уравнений. Обозначим

$$\gamma_m(x) = \begin{cases} 0, \text{если } x \notin K + m, \\ 1, \text{если } x \in K + m, \end{cases}$$

и рассмотрим ряд с коэффициентами $\gamma_m(x)$

$$g_m(z) = \sum_{x \in K} \gamma_m(x) z^x = \sum_{x \in m+K} z^x = \frac{z^m}{\prod(1 - z^{a^j})}.$$

Запишем композицию Адамара рядов $F(z)$ и $g_m(z)$

$$F \circ g(z) = \sum_{x \in K} f(x) \gamma_m(x) z^x = \sum_{x \in m+K} f(x) z^x = F_m(z).$$

Из теоремы следует следующая связь

$$F_m(z) = \frac{1}{(2\pi i)^l} \int\limits_{\Gamma} \frac{F(\xi) z^m}{\prod(\xi^{a^j} - z^{a^j})} \frac{d\xi}{\xi^{m+I-\sum a^j}}$$

Список литературы

1. Бибербах Л. Аналитическое продолжение // М.: Наука, 1967. 240~с.

2. Odoni R. W. K. On the norms of algebraic integers //Mathematica. 1975. V. 22. P. 71-80.

3. Djokovic D.Z. A properties of the Taylor expansion of rational function in several variables// J. of Math. Anal, and Appl., 1978. V. 66. P. 679-685.

4. Цих А.К. Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфных функций двух переменных // Мат. сборн. 1991. Т.182(11). С. 1588-1612.

5. Лейнартас Е.К. Многомерная композиция Адамара и суммы с линейными ограничениями на индексы суммирования // Сиб. мат. журн. 1989. Т.30. №2. С. 102-107.