УДК 517.55+517.929.4

УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ И АМЕБЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

Рогозина М.С.
научный руководитель д-р физ.-мат. Наук Лейнартас Е. К.
Сибирский федеральный университет

Разностные уравнения возникают в различных областях математики. Разностной схемой обычно называют разностное уравнение, аппроксимирующее исходное дифференциальное уравнение и дополнительные (начальные, граничные) условия. Одно из важнейших свойств разностной схемы – устойчивость. В теории Лакса [1] сходимость разностной схемы изучается в пространстве решений исходной дифференциальной задачи и теорема эквивалентности утверждает, что если исходная дифференциальная задача корректна и схема аппроксимирует эту задачу, то устойчивость необходима и достаточна для сходимости.

В монографии [2] исследована устойчивость однородной двухслойной линейной разностной схемы с постоянными коэффициентами. Условие устойчивости здесь дается в терминах, связанных с понятием разностной функции Грина задачи Коши.

В работе [3] к исследованию устойчивости многослойных разностных схем применяется теория амеб алгебраических гиперповерхностей и для многослойных однородных разностных схем получена формула для решения задачи Коши через ее разностную функцию Грина. Кроме того, дано необходимое условие устойчивости задачи Коши. Приведен пример, показывающий, что это условие не является достаточным. Сформулировано и доказано достаточное условие устойчивости.

В данной работе исследуется случай неоднородных разностных схем.

Введем необходимые обозначения и определения.

Пусть $P(\delta,\delta_{n+1}) = \sum_{(\alpha,\beta)\in A} a_{\alpha\beta}\delta^{\alpha}\delta_{n+1}^{\beta}$ – полиномиальный разностный оператор, то есть $A = \{(\alpha,\beta)\}$ – конечное подмножество целочисленной решетки $\mathbb{Z}^{n+1}$, и $\delta = (\delta_1,\ \delta_2,\dots,\delta_n\ )$, $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\dots,\alpha_n)$ и $\delta^{\alpha} = \left(\delta_1^{\alpha_1},\ \delta_2^{\alpha_2}\dots,\ \delta_n^{\alpha_n}\right)$.

В данной работе рассматриваются разностные операторы с постоянными коэффициентами, характеристический многочлен $P(z,w)$ которых имеет вид

$$P(z,w) = P_m(z)w^m + P_{m-1}(z)w^{m-1} + \cdots + P_0(z),$$

где $P_j(z)$ являются многочленами переменных $z = (z_1,\ z_2,\dots,\ z_n)$ и *коэффициент при старшей степени* $P_m(z) \equiv 1$.

Такие разностные уравнения возникают в теории разностных схем и ниже мы будем использовать терминологию этой теории.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородной $(m+1)$-слойной линейной разностной схемы вида

$$\left[\delta_{n+1}^{m} + \sum_{k=1}^{m} P_j(\delta)\delta_{n+1}^{m-k}\right] f(x,y) = g(x,y), \tag{1}$$

где $P_j(\delta)$ – полиномиальные разностные операторы с постоянными коэффициентами, $g(x,y)$ – заданная функция и $x = (x_1,\ x_2,\dots,x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Задача Коши для уравнения (1) формулируется следующим образом:

Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$f(x,y) = \varphi_y(x),\ \ y = 0,1,\dots,m-1, \tag{2}$$

где $\varphi_y(x)$ *– заданные функции переменного* $x = (x_1,\ x_2,\dots,x_n)$.

Определение 1. *Решение $\mathcal{P}(x,y)$ разностного уравнения*
$$\sum P(\delta,\delta_n)\mathcal{P}(x,y)=\delta_{(0,0)}(x,y),\quad (x,y)\in\mathbb{Z}^{n+1},$$
удовлетворяющее начальным условиям
$$\mathcal{P}(x,y)=0,\qquad y=0,1,\dots,m-1,$$
где
$$\delta_{(0,0)}(x,y)=\begin{cases}0, \text{если } (x,y)\neq 0,\\ 1, \text{если } (x,y)=0\end{cases}$$
называется фундаментальным решением (функцией Грина).

Определим две функции на $\mathbb{Z}^{n+1}$:
$$\varphi(x,y)=\begin{cases}\varphi_y(x), & \text{для } x\in\mathbb{Z}^n \text{ и } y=0,1,\dots,m-1,\\ \quad 0, & \text{для } \ x\in\mathbb{Z}^n \text{ и } y\geq m;\end{cases}$$
$$\mu(x,y)=\sum_{(\alpha,\beta)\in A}a_{\alpha\beta}\,\varphi(x+\alpha,y+\beta),\qquad x\in\mathbb{Z}^n \text{ и } -m\leq y<0.$$

Обозначим через $\Pi=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^{n+1}: y\geq 0\}$ полупространство в $\mathbb{Z}^{n+1}$.

Теорема 1. *Если $f(x,y)$ решение задачи Коши (1) – (2), то для $(x,y)\in\Pi$ справедлива формула*
$$f(x,y)=f_0(x,y)+f^*(x,y),\tag{3}$$
где $f_0(x,y)=\sum_{(x',y')}\mu(x',y')\,\mathcal{P}(x-x',y-y')$, причем суммирование проводится по всем точкам $(x',y')\in\mathbb{Z}^{n+1}$, удовлетворяющим условию $-m\leq y'<0$, а $f^*=\sum_{(x',y')}g(x',y')\mathcal{P}(x-x',y-y')$, где суммирование проводится по всем точкам $(x',y')\in\mathbb{Z}^{n+1}$ удовлетворяющим условию $0\leq y'\leq m-1$. При этом для любого фиксированного $(x,y)\in\Pi$ число слагаемых для f_0 и f^* конечно.

Замечание. Отметим, что f_0 – решение однородной задачи Коши, f^* – частное решение, с нулевыми начальными данными.

Для доказательства теоремы 1 потребуется следующая лемма.

Лемма. *Пусть K – конус в $\mathbb{R}^{n+1}_{(x,y)}$ порожденный векторами $a^j=(a_1^j,\dots,a_n^j,a_{n+1}^j)$, $j=1,2,\dots,m$*
$$K=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{n+1}:(x,y)=\sum_{j=1}^{m}\lambda_j a^j,\lambda_j\geq 0\right\}.$$
Если $a_{n+1}^j>0$ для $j=1,\dots,m$, то пересечение конуса K с гиперплоскостью $y=const$ является ограниченным множеством.

В случае двухслойных разностных схем формула (3) была получена в монографии [2], а для задачи Коши в положительном октанте $\mathbb{Z}^n_+$ целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ в [4].

Приведем некоторые сведения из теории амеб алгебраических гиперповерхностей (см. [5])

Определение 2. *Многогранником Ньютона N_P многочлена $P(z,w)=\sum_{(\alpha,\beta)\in A}a_{\alpha\beta}z^\alpha w^\beta$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^{n+1}$ элементов множества A.*

Пусть $V=\{\lambda\in\mathbb{C}^{n+1}: P(z,w)=0\}$ – множество нулей многочлена $P(z,w)$, оно называется характеристическим множеством.

Определение 3. *Амебой алгебраической гиперповерхности называется образ множества нулей V многочлена $P(z,w)=\sum_{(\alpha,\beta)\in A}a_{\alpha\beta}z^\alpha w^\beta$ при отображении*
$$Log:(z,w)=(z_1,\dots,z_n,w)\to(\log|z_1|,\dots,\log|z_n|,\log|w|)=(Log|z|,Log|w|).$$

Отметим, что множество V, а значит и $LogV$, замкнуто, поэтому его дополнение открыто. Оно состоит из конечного числа связных выпуклых компонент, и вершине $(0, m)$ многогранника N_P соответствует связная компонента $E_{0.m}$ дополнения амебы.

Для произвольной функции $\psi(x, y)$, заданной в полупространстве $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^{n+1}: y \geq 0\}$ определим ее норму следующим образом

$$\|\psi\| = \sup|\psi(x, y)|.$$

Определение 4. *Назовем задачу (1) – (2) устойчивой, если существует константа* $L > 0$ *такая, что при любых ограниченных начальных данных (2) и ограниченной правой части* $g(x, y)$ *для соответствующего решения* f *выполняется неравенство*

$$\|f\| \leq L(\|\psi\| + \|g\|).$$

Теорема 2. *Пусть* $E_{o,m}$ *связная компонента дополнения амебы характеристического многочлена* $P(z, w)$*, соответствующая вершине* $(0, m)$ *многогранника Ньютона. Задача Коши (1) – (2) устойчива тогда и только тогда, когда начало координат принадлежит* $E_{o,m}$*, то есть* $(0,0) \in E_{o,m}$.

Список литературы

1. В.С.Рябенький, Введение в вычислительную математику: учеб. пособие, изд. 2-е, исправл., – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 296 с.
2. М.В.Федорюк, Асимптотика: интегралы и ряды, – М.:Наука, 1987. – 544 с.
3. Рогозина М.С. Устойчивость многослойных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей // Журнал СФУ. Математика и физика. 2012. Т. 5, \No 2. С. 256--263.
4. Е.К.Лейнартас, Кратные ряды Лорана и разностные уравнения. // Сиб. матем. журн., 45(2004), 387--393.
5. M. Forsberg, M. Passare, A. Tsikh, Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Advances in Mathematics, 151(2000), No 1, 45--70.