УДК 517.55

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПРИЗНАК ГИПОЭЛЛИПТИЧНОСТИ ПОЛИНОМА

Зубченкова Е.В.,
Научный руководитель д.ф.-м.н., профессор Цих А.К.
Сибирский Федеральный Университет

Понятие гипоэллиптичности полинома, введенное в 60-х годах Хермандером [1] как обобщение понятия эллиптичности полинома, имеет сугубо аналитический характер и состоит в следующем: полином

$$P(x) = \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^n} c_\gamma x^\gamma$$

называется *гипоэллиптическим,* если для любого мультииндекса $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n > 0$

$P^{(\alpha)}(x) P^{-1}(x) \to 0$ при $\|x\| \to \infty$,

где $P^{(\alpha)}(x)$ − производная $\frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1{}^{\alpha_1} \dots x_n{}^{\alpha_n}} P(x)$.

В связи с этим, усилия многих математиков были направлены на получения условий гипоэллиптичности, легко поддающихся проверке (см., например, [2]).

Обозначим через $\Delta = \Delta(P)$ многогранник Ньютона для полинома P. Для каждого ненулевого направления $a \in \mathbb{R}^{n*}$ определим укорочение (срезку) полинома P:

$$P_a = \sum_{\gamma \in \Delta^a} c_\gamma x^\gamma,$$

где $\Delta^a = \{k \in \Delta : \langle a, k\rangle = \min\langle a, l\rangle\}$ − грань многогранника Ньютона Δ в направлении a.

В аспекте геометрического подхода к обобщению понятия эллиптичности благоприятным к исследованию оказался так называемый класс квазиэллиптических полиномов. Такой класс был введен в 90-х годах Ермолаевой Т.О. и Цихом А.К. [3]: полином $P(x)$ называется *квазиэллиптическим*, если для всякого ненулевого направления $a \in \mathbb{R}^{n*}$ срезка $P_a \neq 0$ в $(\mathbb{R}^n \setminus 0)^n$. Здесь $\mathbb{R}^{n*}$ −сопряженное пространство к $\mathbb{R}^n$. Заметим, что поскольку многогранник Δ имеет лишь конечное число граней, то условие квазиэллиптичности достаточно проверить также лишь для конечного числа срезок P_a.

Теорема. *Квазиэллиптический полином с полным многогранником Ньютона является гипоэллиптическим.*

Данная теорема доказывается с использованием следующих лемм, представляющих самостоятельный интерес.

Пусть Δ' − множество точек, состоящих из внутренних точек Δ, а также из тех граничных точек, которые принадлежат координатным плоскостям:

$$\Delta' = \Delta^0 \cup (\Delta \cap \partial \mathbb{R}^n_+).$$

Многогранник Δ назовем *полным*, если с любой точкой $\beta \in \Delta$, точка $\gamma < \beta$ принадлежит Δ'. Здесь запись $\gamma < \beta$ означает, что $\gamma_1 \leq \beta_1, \ldots, \gamma_n \leq \beta_n$, причем хотя бы одно из неравенств строгое.

Лемма 1. *Пусть полином $P(x)$ – квазиэллиптический и не обращающийся в нуль на $\mathbb{R}^n$, а многогранник $\Delta(P)$ – полный. Если $\sigma \in \Delta'(P)$, то существуют положительные константы c и k такие, что*

$$|P(x)||x_1|^{-\sigma_1} \ldots |x_n|^{-\sigma_n} \geq c|x_1 \ldots x_n|^k.$$

Лемма 2. Если многогранник $\Delta(P)$ полинома P является полным и $P^{(\alpha)}$ – производная порядка $|\alpha| > 0$, то

$$\Delta\left(P^{(\alpha)}\right) \subset \Delta'(P).$$

Литература

1. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*: в 4 т. М.: Мир, 1986. Т. 2: Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. 456 с.
2. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. *Об одном классе гипоэллиптических полиномов* // Матем. сборник. 1968. Т. 75(117), № 3. С. 400-416.
3. Ермолаева Т.О., Цих А.К. *Интегрирование рациональных функций по $\mathbb{R}^n$ с помощью торических компктификаций и многомерных вычетов* // Матем. сборник. 1996. Т. 187, № 9. С. 45-64.