УДК 519.248

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ АССОЦИАТИВНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Кочанова Ю.С.,

научный руководитель канд. ф.-м. наук, доцент Семенова Д. В.

Сибирский федеральный университет

Статистическую систему можно определить как случайное множество событий, образующих своеобразную структуру статистических взаимосвязей случайных событий друг с другом. Изучение структур статистических взаимосвязей случайных событий означает, в итоге, изучение вероятностных распределений соответствующих случайных множеств событий. Практический интерес к изучению этих задач объясняется стремлением повысить эффективность функционирования некоторых статистических систем природы и общества.

Рассмотрим множество случайных событий: $K:(\Omega, F, P)\to(2^X, 2^{2^X})$, где $X\subseteq F$ — выделенное конечное множество событий, 2^X — множество всех подмножеств X. Распределением вероятностей случайного множества K называется набор из 2^N вероятностей: $p_I=\{p(X)=P(K=X), X\in 2^X\}$ — эвентологическое распределение I-го рода; $p_{II}=\{p_X=P(K\supseteq X), X\in 2^X\}$ — эвентологическое распределение II-го рода. Эвентологические распределения I-го и II-го рода связаны между собой взаимно-обратными формулами обращения Мебиуса: $p_X=\sum_{X\subseteq Y} p(Y)$, $p(X)=\sum_{X\subseteq Y}(-1)^{|Y|-|X|}p_Y$. Случайное множество событий — это случайный элемент со значениями из множества всех подмножеств конечного множества выделенных событий X. Основная идея современной теории случайных множеств состоит в том, что структура статистических взаимозависимостей подмножеств конечного множества полностью определяется распределением случайного множества, заданного на множестве всех его подмножеств. Распределение случайного множества — это удобный математический аппарат для описания всех способов взаимодействия элементов между собой. В работе предлагается новый подход моделирования эвентологических распределений с помощью аппарата ассоциативных функций: треугольных норм (t-норм) и копул.

В работе был предложен подход применения классического понятия копулы к эвентологическим распределениям множеств событий. С одной стороны, эвентологическая копула — это всего лишь сужение на эвентологические распределения понятия копулы, используемой для функции распределения. Однако, с другой стороны — класс эвентологических копул расширяет класс классических копул за счет добавления копул нового типа, которые связывают с вероятностями событий не только вероятности их пересечений, но и вероятности других сет-операций над ними [1].

Определение 1. Пусть $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ — множество избранных событий. Тогда копула связывает вероятность пересечения множества событий X с их вероятностями

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} x_i)=copula(P(x_1),...,P(x_n)). \quad (1)$$

В качестве функции копулы будем выбирать архимедовы непрерывные t-нормы, являющиеся копулами и в классическом смысле. Рассмотрим некоторые семейства этих функций применительно к эвентологическим распределениям на примерах для дуплета событий.

Рассмотрим дуплет событий $X = \{x, y\}$. Пусть $P(x) = p_x$ и $P(y) = p_y$ — соответствующие вероятности событий и $P(x \cap y) = p_{xy}$ — вероятность пересечения событий. Тогда копула согласно (1) будет иметь вид $p_{xy} = copula(p_x, p_y)$.

Пример 1. Рассмотрим t-норму Швейцера-Скляра $T_\alpha(a,b) = \max\{a^{-\alpha} + b^{-\alpha} - 1, 0\}^{-\frac{1}{\alpha}}$, где параметр $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. При $\alpha \ge -1$ t-норма $T_\alpha(a,b)$ является копулой . При $\alpha = 0$ мы получаем t-норму Лукасевича $T(a,b) = \max\{a + b - 1, 0\}$. В этом случае эвентологическая копула описывает левую границу Фреше для вероятности пересечения событий: $copula_{-1}(p_x, p_y) = \max\{p_x + p_y - 1, 0\}$. При $\alpha = 1$ мы получаем копулу вида $copula_1(p_x, p_y) = \dfrac{p_x p_y}{p_x + p_y - p_x p_y}$.

Одной из мер зависимостей между случайными событиями является ковариация событий : $Kov_{xy} = P(x \cap y) - P(x)P(y)$. Для последнего случая получаем $Kov_{xy} = \dfrac{p_x p_y p_x^c p_y^c}{p_x + p_y - p_x p_y}$, где $p_x^c = 1 - p_x$, $p_y^c = 1 - p_y$ — вероятности дополнений событий. Очевидно, что для любых $p_x > 0$, $p_y > 0$, $Kov_{xy} > 0$, т.е. позволяет моделировать распределения событий, которые статистически притягиваются.

Пример 2. Рассмотрим строгую t-норму $T_\alpha(a,b) = \dfrac{ab}{1 - \alpha(1-a)(1-b)}$, которая порождает семейство копул при $-1 \le \alpha \le 1$. В этом случае эвентологическая копула будет иметь вид $copula(p_x, p_y) = \dfrac{p_x p_y}{1 - \alpha(1 - p_x)(1 - p_y)}$. При $\alpha = 1$ получаем формулу $copula_1(p_x, p_y) = \dfrac{p_x p_y}{p_x + p_y - p_x p_y}$. При $\alpha = 0$ получаем независимую копулу $p_{xy} = copula(p_x, p_y) = p_x p_y$. При $\alpha = -1$ получаем $p_{xy} = copula(p_x, p_y) = \dfrac{p_x p_y}{1 + (1 - p_x)(1 - p_y)}$.

Выразим Kov_{xy} через параметр α : $Kov_{xy} = \dfrac{p_x p_y}{1 - \alpha(1 - p_x)(1 - p_y)} - p_x p_y \Rightarrow Kov_{xy} = \dfrac{\alpha p_x p_y p_x^c p_y^c}{1 - \alpha p_x^c p_y^c}$. Отсюда видно, что знак ковариации зависит от знака параметра α . Итак, при $-1 \le \alpha < 0$ мы получаем копулу, которая моделирует распределение статистически отталкивающихся событий. При $\alpha = 0$ — независимых событий. При $0 < \alpha \le 1$ — статистически притягивающихся событий.

Следует заметить, что рассмотренные копулы не позволяют моделировать так называемые “крайние” структуры зависимостей событий — непересекающиеся и вложенные.

Одной из важнейших задач эвентологии является разработка методов определения структуры зависимостей сложных распределений множеств событий большой размерности. Рассмотренные методы оценки Э-распределений не столь эффективны и универсальны, однако они позволяют получать входные данные в виде Э-распределений и их характеристик для многих моделей статистических систем, обладающих сложной структурой зависимостей и взаимосвязей.