

**ДИНАМИКА РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СФЕРЫ С ОДНОРОДНЫМ
ДАВЛЕНИЕМ**

Полукеев С. И.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Паклин Н. Н.

Сибирский федеральный университет

Исследуется гравитационное поле нестационарного сферически симметричного распределения материи. Поле определяет геометрию пространства-времени и описывается метрическим тензором g_{ik} . Свойства вещества описываются тензором энергии-импульса T_{ik} . Связь поля с материей определяется уравнениями Эйнштейна

$$G_{ik} = -8\pi Gc^{-4} T_{ik} , \quad (1)$$

где величина G_{ik} – тензор Эйнштейна - выражается через метрический тензор и его производные. Вещество описывается простой моделью с тензором энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_{ik} = (\varepsilon + p) u_i u_k - p g_{ik} , \quad (2)$$

здесь $\varepsilon(t, r)$ – плотность энергии, $p(t)$ – давление и 4-скорость $u^i = dx^i / ds$.

В работе используются сферические координаты, сопутствующая система отсчета (радиальная скорость вещества $v = dr / dt$ обращается в ноль) и геометрическая система единиц: $G = c = 1$. Выражение

$$T^{ik}{}_{;k} = 0 , \quad (3)$$

является следствием уравнений Эйнштейна, для случая $p = p(t)$ из него следует, что $g_{00} = g_{00}(t)$. Введем синхронно-сопутствующую систему отсчета с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - F^2 dr^2 - R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) , \quad (4)$$

где $F = F(t, r)$, $R = R(t, r)$. При сферической симметрии система уравнений Эйнштейна состоит из четырех уравнений, но только три из них являются независимыми. Уравнение $G_{01} = -8\pi T_{01}$ легко интегрируется, а результат удобно представить как

$$F = R' / \sqrt{1 - q(r)} , \quad (5)$$

где $q(r)$ – произвольная функция. Теперь $G_{00} = -8\pi T_{00}$ и $G_{11} = -8\pi T_{11}$ имеют вид

$$8\pi\varepsilon(t, r) \cdot R^2 R' = [R(q(r) + \dot{R}^2)]' , \quad 8\pi p(t) \cdot R^2 + q(r) + \dot{R}^2 + 2R\ddot{R} = 0 . \quad (6)$$

Анализ уравнений (6) показывает, что при $p > 0$ коллапс является конечным результатом эволюции модели. Если $q(r) \geq 0$, то модель ведет себя подобно пылевому шару в вакууме с «замкнутой» геометрией. В случае $q(r) < 0$ поведение модели существенно зависит от начальных условий и вида функции $p(t)$.

Обнаружен осциллирующий режим с возрастающей амплитудой, когда амплитуда становится сравнимой с начальным значением R , шар коллапсирует.

Если давление можно считать постоянным, то уравнения (6) интегрируются как

$$R\dot{R}^2 = a(r) - q(r) \cdot R - \frac{1}{3}8\pi p \cdot R^3; \quad 8\pi\varepsilon(t, r) = a'/R^2 R' - 8\pi p, \quad (7)$$

где $a(r)$ – произвольная функция.

Колебания возможны, если скорость равна нулю при двух значениях R , т.е. если правая часть первого уравнения (7) имеет два действительных положительных корня. Неравенство $8\pi p \cdot 9a^2 < -4q^3$ является условием колебаний. Поскольку в нем присутствуют функции $a(r)$ и $q(r)$, то условия колебания могут нарушаться для некоторых слоев шара, в результате они будут монотонно сжиматься.

Общее решение первого уравнения (7) представим в виде квадратуры

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2 - q \cdot \beta \cdot z^{2/3}}} = \sqrt{6\pi p} \cdot t + b(r); \quad z^2 = \frac{8\pi p}{3a} \cdot R^3; \quad \beta = \left(\frac{3}{8\pi p a^2} \right)^{1/3}. \quad (10)$$

В случае $q = 0$ возможно точное решение

$$R = (3a/8\pi p)^{1/3} \sin^{2/3}(\sqrt{6\pi p} \cdot t + b(r)), \quad (11)$$

здесь $b(r)$ – произвольная функция.

Если знак давления сохраняется, а само давление мало меняется по абсолютной величине или меняется медленно, то поведение модели будет подобно эволюции в случае постоянного давления. Такой случай удобно анализировать качественно с помощью фазовых портретов. Первое из уравнений (6) удобно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{R} = V, \\ \dot{V} = -(V^2 + q)/2R - 4\pi p(t)R. \end{cases} \quad (12)$$

В случае постоянного давления система (12) становится автономной, для этого случая обнаружено четыре варианта фазовых портретов:

1. Монотонное поведение: $p > 0, q > 0$, величина R может обращаться в ноль (рис.1).
2. Катастрофическое поведение: $p > 0, q < 0$, величина R может обращаться в ноль либо колебаться (имеется особенность типа «центр») (рис.2).
3. Катастрофическое поведение: $p < 0, q < 0$, величина $R \rightarrow 0$ асимптотически либо $R \rightarrow \infty$ (рис.3).
4. Катастрофическое поведение: $p < 0, q > 0$, величина R может обращаться в ноль либо $R \rightarrow \infty$ (имеется особенность типа «седло») (рис.4).

Данная модель может отражать некоторые свойства реальных тел, например, явление отскока при коллапсе. Некоторые решения можно интерпретировать как пылевой шар (темная материя), погруженный в однородную жидкость (темная

энергия), т.е. эволюцию крупномасштабной неоднородности на однородном космологическом фоне.

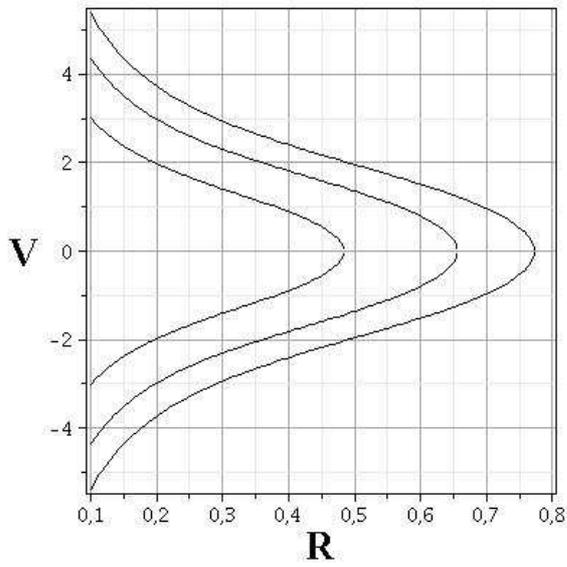


Рис.1

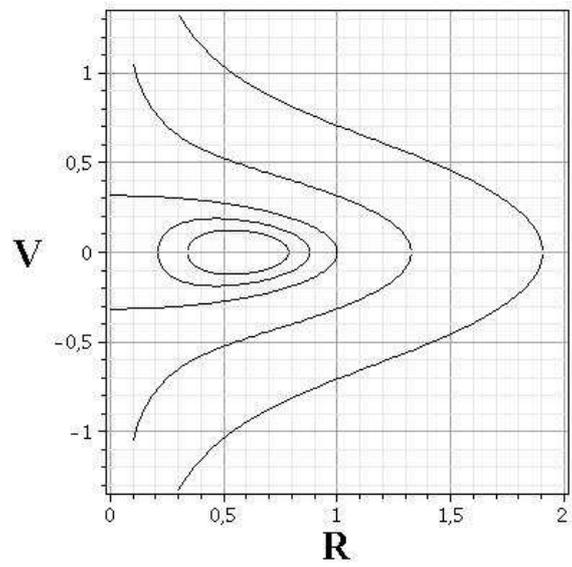


Рис.2

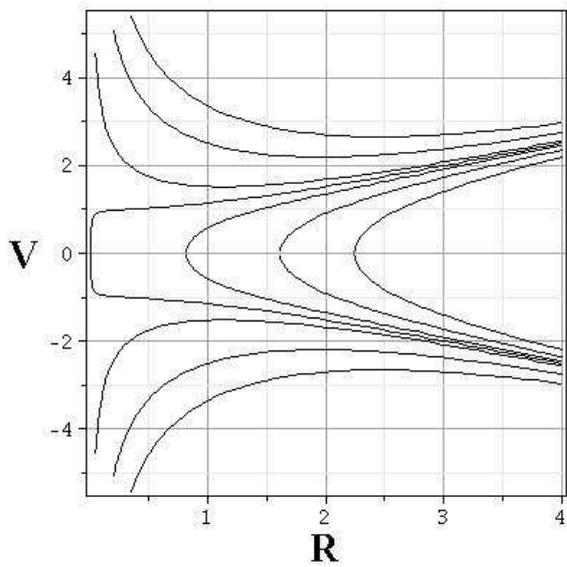


Рис.3

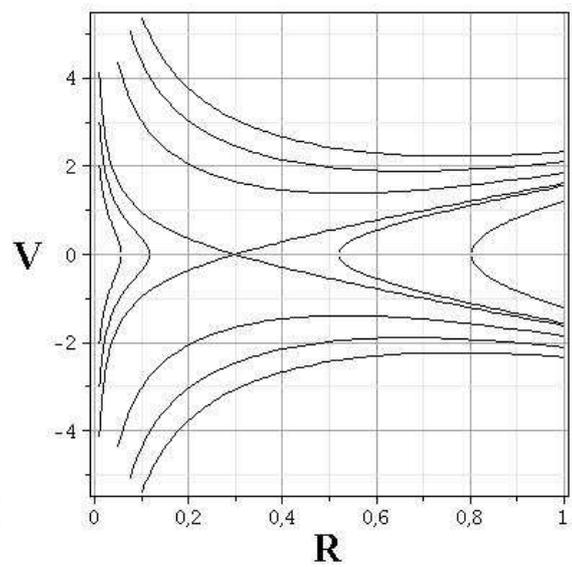


Рис.4

Для рис.1 выбраны следующие значения параметров: $8\pi\rho=15$, $q = 0.9$;

Для рис.2 параметры: $8\pi\rho = 0.3$, $q = -0.1$;

Для рис.3 параметры: $8\pi\rho = -1$, $q = -1$;

Для рис.4 параметры: $8\pi\rho = -10$, $q = 0.9$;