УДК 514.113.5

ПРОСТЫЕ ТЕЛА, СОСТАВЛЕННЫЕ ИЗ МНОГОГРАННИКОВ С ПАРКЕТНЫМИ ГРАНЯМИ

Абубакирова Е.Г.,
научный руководитель профессор Тимофеенко А.В.,
Сибирский федеральный университет

Напомним определение правильногранника –это многогранник, у которого каждая грань составлена из правильных многоугольников так, что каждая вершина этого многоугольника является и вершиной самого многогранника.
Если каждая грань многогранника есть правильный многоугольник, то многогранник называют правильногранным.
Правильногранный многогранник называется простым, если его нельзя рассечь на два правильногранных многогранника плоскостью, которая пересекает поверхность этого многогранника только по его ребрам. В противном случае, он называется составным.

К 1967 году было выяснено [1], что кроме бесконечных серий призм и антипризм существует ровно 28 простых многогранников M_1, M_2,...M_{28} , называемых сегодня телами Залгаллера. Еще через семь лет на основе этой же работы [1], были найдены все выпуклые правильногранники, каждый из которых не рассекается никакой плоскостью на два правильногранника. По имени их первооткрывателей их называют многогранниками Иванова, Q_1,..Q_5 и многогранником Пряхина Q_6. Тела Иванова и Пряхина называют несоставными, подчеркивая их отличие от правильногранных простых тел.

Несколько лет назад опубликовано [2] доказательство теоремы, перечисляющей все выпуклые правильногранники как соединения несоставных и простых тел. В частности, и правильногранных тел оказалось 92, не считая правильных и равноугольно-полуправильных многогранников. т. е. Таким образом, поставлена точка в полувековой истории доказательства полноты списка этих 92 многогранников, называемых сегодня телами Джонсона. «Живые» модели всех выпуклых правильногранников можно найти в электронных атласах: http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html и http://tupelo-schneck.org/polyhedra/

Следующий шаг был сделан 40 лет назад, когда Ю.А.Пряхин [3] изложил схему доказательства теоремы, классифицирующей с точностью до комбинаторной эквивалентности выпуклые многогранники с равноугольными и паркетными гранями.
Напомним, выпуклый многоугольник называем паркетным, если он может быть составлен из конечного и большего единицы числа равноугольных многоугольников.

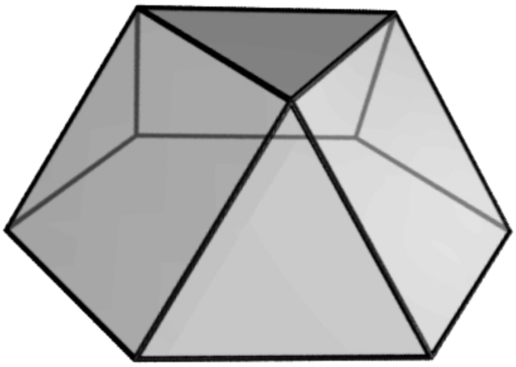
Однако до сих пор неизвестно, даже количество несоставных многогранников с паркетными и правильными гранями, отличных от четырех бесконечных серий таких тел. В работе [4] указаны семь несоставных тел, которые перестают быть такими, если некоторые их грани рассматривать как паркетные. К таким телам относятся трехскатный купол M_4 (рис. 1) и усеченный тетраэдр M_{10} , для каждого из которых указано лишь из скольки тетраэдров M_1 и пирамид M_2 его можно построить.

В настоящей работе выяснено какое именно соединение этих пирамид приводит к телам M_4 и M_{10}.

Предложение 1. *Соединение M_1 и M_2 по схеме*

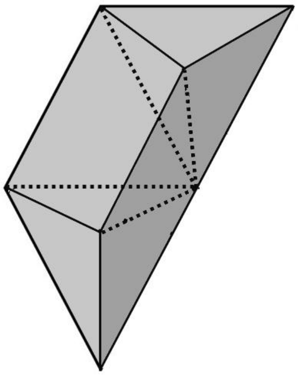
$$((M_1+M_2)+(M_1+M_2))+M_1+M_2+M_1$$

приводит к трехскатному куполу M_4. (рис. 1).



Доказательство. Можно рассечь M_4 плоскостью, которая содержит длинную диагональ шестиугольной грани и параллельной ей ребро треугольной грани. Очевидно, в сечении получаем трапецию, составленную их трех правильных треугольников. Действительно, в сечении получается равнобочная трапеция, одно из оснований которой равно боковой стороне и в два раза меньше другого основания. Поэтому меньшее основание и половина большего являются параллельными сторонами ромба, составленного из двух правильных треугольников. Рассмотренное сечение разбивает M_4 на две части. Рассмотрим ту из них, гранями которой являются две трапеции, два треугольника и квадрат. Середина большего основания трапеции равноудалена от вершин этого пятигранника. Следовательно и ввиду правильности грани M_4, указанная точка является вершиной двух тетраэдров M_1, соединенных боковыми гранями с правильногранной четырехугольной пирамидой M_2. Следовательно, полученная часть представима в виде соединения

$M_1+M_2+M_1$ (рис. 2). (1)



Квадратные грани второй части являются основаниями четырехугольных пирамид M_2, которые можно получить из такой пирамиды первой части поворотом на 120^0 и 240^0, вокруг оси перпендикулярной шестиугольной грани проходящей через её центр. Таким образом, вторую часть можно получить соединением двух треугольных призм M_1 и M_2.

$(M_1+M_2)+(M_1+M_2)$. (рис. 3) (2)

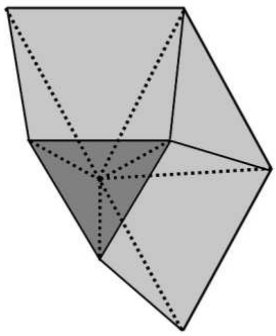
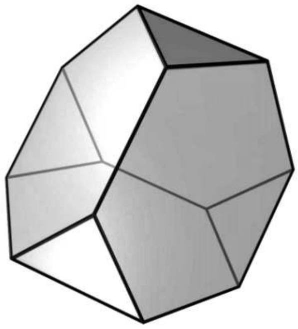
 

Рис.3 Рис.4

Объединение формул (1) и (2) приводит к завершению доказательства.

Предложение 2. *Соединение многогранников M_1, M_2, M_4 по схеме:*

$$(M_1+(M_2+M_2)+M_1+M_1)+(M_2+M_4+M_2+M_2) \quad (3)$$

приводит к усеченному тетраэдру M_{10} (рис. 4).

Доказательство. В формуле (3) соединение M_2+M_2 есть октаэдр. К трем его граням, смежным к какой-нибудь граней, присоединяем по тетраэдру M_1 (рис. 5).

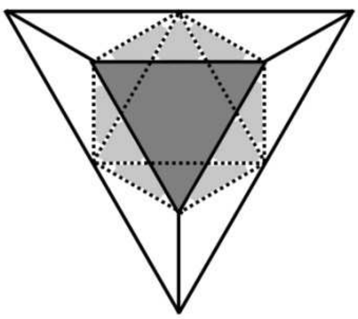
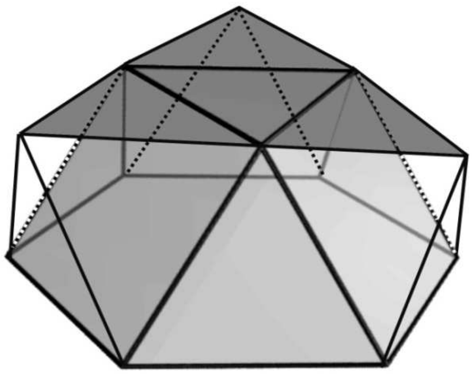
 

Рис.5 Рис.6

В результате эта грань превратится в треугольник с удвоенными сторонами. Смежными с ним будут три трапеции, каждая из которых составлена из трех правильных треугольников. Трапеции являются боковыми гранями усеченной треугольной пирамиды

$$(M_1+(M_2+M_2)+M_1+M_1) \quad (4)$$

Теперь рассмотрим нижнюю часть треугольного сечения тела M_{10}. (рис. 6). Нетрудно увидеть, что оно получено присоединением трех пирамид M_2 квадратными гранями к трехскатному куполу M_4 ,

$$M_2+M_4+M_2+M_2. \quad (5)$$

Формула (3) получена сложением формул (4) и (5), что и требовалось доказать.

Основой для построения изображений многогранников, является электронный атлас: http://mathworld.wolfram.com/JohnsonSolid.html

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Залгаллер В. А. Выпуклые многогранники с правильными гранями // Зап. науч. Семинаров ЛОМИ. 1967. Т. 2. С. 5 218.

[2] Тимофеенко А.В. К перечню выпуклых правильногранников // Современные проблемы математики и механики. Том VI. Математика. Выпуск 3. К 100-летию со дня рождения Н.В. Ефимова./ Под ред. И. Х. Сабитова и В.Н. Чубарикова. –М.: Изд-во МГУ, 2011, С.148--163.

[3] Пряхин Ю. А. Выпуклые многогранники, грани которых равноугольны или сложены из равноугольных //Зап. научн. семинаров ЛОМИ 1974. Т.45. С. 111--112.
[4] Тимофеенко А.В. О ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКАХ С РАВНОУГОЛЬНЫМИ И ПАРКЕТНЫМИ ГРАНЯМИ // Чебышевский сб., 2011,том 12,выпуск 2,страницы 118–126.