УДК 519.46

ПРИМЕРЫ НЕЗАМКНУТЫХ КОВРОВ АДДИТИВНЫХ ПОДГРУПП

Куклина С.К., Лихачёва А.О.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук, проф. Нужин Я.Н.
Сибирский федеральный университет

Пусть Ф – приведенная, неразложимая система корней ранга l, Е(Ф,К) – элементарная группа Шевалле типа Ф над коммутативным кольцом К с единицей. Группа Е(Ф,К) порождается своими корневыми подгруппами

$$X_r = x_r(K) = \{x_r(t) | t \in K\},\ r \in \Phi.$$

Подгруппы X_r абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых t, u ∈ K справедливо соотношение

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u).$$

Назовем *элементарным ковром* типа Ф ранга l над К всякий набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r | r \in \Phi\}$$

кольца К с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js},\ \text{при}\ r,s\ \in ir+js \in \Phi,\ i>0,\ j>0, \qquad (*)$$

где

$$\mathfrak{A}_r^i = \{a^i | a \in \mathfrak{A}_r\},$$

а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \Pi_{i,j>0} x_{ir+js}\left(C_{ij,rs}(-t)^i u^i\right), r, s, r+s\ \in \Phi.$$

Здесь и далее $[\mathrm{x},\mathrm{y}] = x^{-1}y^{-1}xy$. Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Ф над К определяет *ковровую подгруппу*

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = < x_r(\mathfrak{A}_r) | r \in \Phi >$$

группы Шевалле Е(Ф,К), где $< \mathrm{M} > -$ подгруппа, порожденная множеством М.Ковер $\mathfrak{A}$ типа Ф ранга l над кольцом К называется *замкнутым (допустимым)*, если его ковровая подгруппа Е(Ф,$\mathfrak{A}$) не имеет новых корневых элементов, то есть

$$\mathrm{E}(\Phi, \mathfrak{A}) \cap X_r = < x_r(\mathfrak{A}_r)\ |\ r \in \Phi >.$$

В. А. Койбаев(Тр. ИММУрО РАН, Т.17, №4, 2011,С. 134-141)построил пример незамкнутого ковра со всеми, не равными нулю, аддитивными подгруппамидля типа A_l на матричном языке.В дипломной работе А.М. Потаповой был построенаналогичный пример для групп Шевалле, ассоциированных с системами корней, все корни которых имеют одинаковую длину.В данной работестроятся аналогичные примеры для групп Шевалле любых типов.

Далее$F[x]$ $-$кольцо многочленов над полем $F(x)$.Множество

$$R = \{f \in F(x) \mid degf \geq 2\}$$

всех многочленов степени не меньше двух является идеалом кольца $F(x)$.Пусть $\Pi = \{r_1, r_2, \dots, r_l\}$ – фундаментальная система корней системы Ф, где $r_1 -$ короткий корень. Определим набор аддитивных подгрупп$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ следующим образом.Полагаем

$$\mathfrak{A}_{\mathrm{r}_1} = \mathrm{A},$$

$$\mathfrak{A}_{-\mathrm{r}_1} = \mathrm{B},$$

$$\mathfrak{A}_r = \mathrm{R},\ r \in \Phi,\ r \neq r_1, -r_1,$$

где

$$A = F + R,$$

$$B = F + x + R.$$

Покажем, что набор $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r | r \in \Phi\}$ является ковром.

Если сумма $r + s$корней r, s является корнем, то все три корня $r, s, r + s$ лежат в некоторой подсистеме корней ранга два системы Ф. Поэтому достаточно проверить условия ковровости (*) для систем корнейΦ_2 типа $A_2, \mathrm{B}_2, \mathrm{G}_2$. Пусть $\{a, b\} -$ база системы корней Φ_2 . Справедливы следующие коммутаторные формулы:

$$x_a(t), x_b(u) = x_{a+b}(\pm tu)$$

$$[x_a(t),\ x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu) x_{2a+b}(\pm t^2 u)$$

$$[x_a(t),\ x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu).$$

Возможны следующие три случая:

1) $\mathfrak{A}_{\mathrm{a}} = \mathrm{A},\ \mathfrak{A}_{-\mathrm{a}} = \mathrm{B}, \mathfrak{A}_r = \mathrm{R},\ r \in \Phi_2\ ,\ r \neq \mp a.$

2) $\mathfrak{A}_{\mathrm{a}} = \mathrm{B},\ \mathfrak{A}_{-\mathrm{a}} = \mathrm{A}, \mathfrak{A}_r = \mathrm{R},\ r \in \Phi_2\ ,\ r \neq \mp a.$

3)$\mathfrak{A}_{\mathrm{r}} = \mathrm{R},\ r \in \Phi_2\ .$

Так как$RA \subseteq R,\ RB \subseteq R,\ RR \subseteq R,$в силу того, что $R -$ идеал, и по определению $R \subseteq A \cap B$, то указанные выше формулы дают условия ковровости.

Далее, так как $1 \in A \cap B$, то

$$n_{r_1} = x_{r_1}(1) x_{-r_1}(-1) x_{r_1}(1) \in E(\mathfrak{A}),$$

а, следовательно,

$$n_{r_1}^{-1} x_{-r_1}(x) n_{r_1} = x_{r_1}(x) \in E(\mathfrak{A}).$$

Но, $x \notin \mathfrak{A}_{r_1}$ по определению аддитивной подгруппы $\mathfrak{A}_{r_1}$. Таким образом, ковер $\mathfrak{A}$ не является замкнутым.