

## УСТОЙЧИВОСТЬ ДВУХСЛОЙНОГО ТЕЧЕНИЯ С ИСПАРЕНИЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЛИННОВОЛНОВЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Родионова А.В.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Бекежанова В.Б.

*Институт математики и фундаментальной информатики,  
Сибирский федеральный университет*

Необходимость моделировать двухфазные течения с учетом испарения и точно предсказывать поведение жидкостей диктуется разработкой теплоэффективных систем охлаждения микроэлектронного оборудования, а также проведением новых экспериментов по конвекции жидкости в условиях пониженной и нормальной гравитации. Сложность изучения динамики жидких слоев, тонких пленок жидкостей и процессов теплопереноса в жидкости и попутном потоке газа состоит в том, что они сопровождаются массопереносом на границе раздела в результате испарения.

Детальное исследование двухфазных конвективных течений с учетом испарения на границе раздела и их устойчивости важны для выявления механизмов возможных кризисных явлений, классификации характера влияния различных эффектов (термокапиллярности, гравитации, линейных размеров системы и др.) и определения возможностей управления такими течениями.

Точное решение задачи о двухслойном конвективном течении с учетом явления переноса пара через границу раздела было построено и исследовано в работе [1] (О.Н. Гончарова, Е.В. Резанова «Пример точного решения стационарной задачи о двухслойных течениях с испарением на границе раздела», Барнаул : Известия АлтГУ, 2013. №77. С. 31-33). В качестве математической модели использовались уравнения Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска. В данной работе изучается линейная устойчивость полученного решения относительно длинноволновых возмущений.

### 1. Основное течение

Рассматривается совместное стационарное течение двух вязких несжимаемых жидкостей (жидкость и смесь газа и пара) в плоском слое с учетом силы тяжести (см. Рис. 1). Верхней и нижней границами области являются твердые неподвижные стенки. На недеформируемой границе раздела сред ( $y = 0$ ), предполагается учет процесса испарения и линейная зависимость поверхностного натяжения от температуры  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_T(T - T_0)$ , где  $T_0$  – некоторое исходное значение температуры.

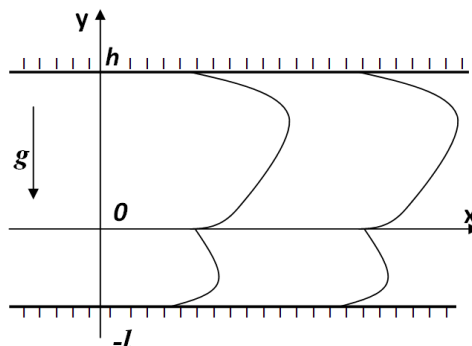


Рис. 1: Геометрия области течения.

Предполагается, что течение является однонаправленным и вектор скорости имеет вид  $\mathbf{u}_i = (u_i, 0)$ . Точное решение уравнений Навье-Стокса в приближении Обербека-Буссинеска получено в работе [1]. В верхнем слое, представляющем собой

смесь газа с парами жидкости, учитывается процесс диффузии и эффект Дюфура. Соответствующие поля скоростей и температур, а также поле концентрации согласно [1] имеют вид:

$$u_i = u_i(y), T_i = (a_1^i + a_2^i y)x + \vartheta_i(y), C_s = (b_1 + b_2 y)x + \varphi(y), \quad (1)$$

где  $i = 1$  соответствует нижний слой  $-l \leq y \leq 0$ , индексу  $i = 2$  – верхний  $0 \leq y \leq h_2$ .

## 2. Уравнения малых возмущений

При переходе к безразмерным переменным, выберем в качестве характерного масштаба длины  $h_2$ , скорости  $v_2/h_2$ , давления  $\rho_2 v_2^2/h_2^2$ , температуры  $T_{20}$ . Примем в качестве единиц измерения параметров среды величины, характерные для верхнего слоя, т.е. для слоя с индексом  $i = 2$ . Таким образом, безразмерные переменные будут иметь вид:  $\eta = x/h_2, \xi = y/h_2, \tau = v_2 t/h_2^2$ . Тогда индексу  $i = 1$  соответствует область  $-h \leq \eta \leq 0$ , а  $i = 2$  – область  $0 \leq \eta \leq 1$ .

При указанном выборе единиц измерения, задача характеризуется следующими безразмерными параметрами:

$$\text{Pr} = \frac{v_2}{\chi_2}, \quad \text{Gr} = \frac{g\beta_2 T_{20} h_2^3}{v_2^2}, \quad \text{Ga} = \frac{gh_2^3}{v_2^2}, \quad \text{Ma} = \frac{\sigma_T A h_2^2}{v_2^2 \rho_2}, \quad \text{Le} = \frac{D}{\chi_2}, \quad \text{Q} = \frac{A h_2}{T_{20}},$$

– числа Прандтля, Грасгофа, Галилея, Марангони, Льюиса соответственно. Знак параметра Q определяет направление градиента температуры.

Далее уже в безразмерных переменных исследуется устойчивость основного течения относительно малых возмущений скорости  $\mathbf{U}_i = (V_i, W_i)$ , температуры  $\Theta_i$ , давления  $P_i$  и концентрации  $C$ . Причем решение задачи для возмущений основного решения (1) ищется в виде нормальных плоских волн. Таким образом, новыми искомыми функциями исходной задачи теперь являются:

$$(\widehat{\mathbf{U}}, \widehat{P}, \widehat{T}, \widehat{C}) = (\mathbf{u}_i, p_i, T_i, C_s) + (\mathbf{U}_i(\xi), P_i(\xi), \Theta_i(\xi), C(\xi)) \cdot \exp[i(\alpha\eta - \lambda\tau)],$$

где  $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$  – комплексный декремент, определяющий временной ход возмущения,  $\alpha$  – безразмерное волновое число вдоль оси  $\eta$ .

С учетом указанного представления для амплитуд нормальных возмущений линеаризованные уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} -i\lambda V_1 + i\alpha u_1 V_1 + u_1' W_1 &= -\frac{i\alpha}{\rho} P_1 + \nu(V_1'' - \alpha^2 V_1), \\ -i\lambda W_1 + i\alpha u_1 W_1 &= -\frac{1}{\rho} P_1' + \nu(W_1'' - \alpha^2 W_1) + \beta \text{Gr} \Theta_1, \\ i\alpha V_1 + W_1' &= 0, \\ -i\lambda \Theta_1 + i\alpha u_1 \Theta_1 + T_{1\eta} V_1 + T_{1\xi} W_1 &= \frac{\chi}{\text{Pr}} (\Theta_1'' - \alpha^2 \Theta_1), \end{aligned}$$

при  $-h \leq \xi \leq 0$ ;

$$\begin{aligned} -i\lambda V_2 + i\alpha u_2 V_2 + u_2' W_2 &= -i\alpha P_2 + (V_2'' - \alpha^2 V_2), \\ -i\lambda W_2 + i\alpha u_2 W_2 &= -P_2' + (W_2'' - \alpha^2 W_2) + \text{Gr} \Theta_2 + \text{Ga} \gamma C, \\ i\alpha V_2 + W_2' &= 0, \\ -i\lambda \Theta_2 + i\alpha u_2 \Theta_2 + T_{2\eta} V_2 + T_{2\xi} W_2 &= \frac{1}{\text{Pr}} (\Theta_2'' - \alpha^2 \Theta_2) + \frac{\delta}{T_{20}} (C'' - \alpha^2 C), \\ -i\lambda C + i\alpha u_2 C + V_2 C_\eta^s + W_2 C_\xi^s &= \frac{\text{Le}}{\text{Pr}} (C'' - \alpha^2 C), \end{aligned} \quad (3)$$

при  $0 \leq \xi \leq 1$ ;

Граничные условия в линейном приближении:

$$\begin{aligned} \xi = -h: \quad V_1 &= 0, \quad W_1 = 0, \quad \Theta_1 = 0; \\ \xi = 1: \quad V_2 &= 0, \quad W_2 = 0, \quad \Theta_2 = 0, \quad C = 0 \text{ или } C' = 0; \\ \xi = 0: \quad V_1 &= V_2, \quad W_1 = W_2 = 0, \quad \Theta_1 = \Theta_2, \quad \nu\rho V_1' = V_2' + \frac{\text{Ma}}{\text{Q}} i\alpha\Theta, \end{aligned} \quad (4)$$

$$P_1 - P_2 = 2(\nu\rho W'_1 - W'_2), \quad k\Theta'_1 - \Theta'_2 - \frac{\delta}{T_{20}}C' = \frac{K\rho_2 D}{k_2 T_{20}}C'$$

где  $K$  - теплота испарения,  $D$  - коэффициент диффузии пара в газе,  $\Upsilon$  - концентрационный коэффициент плотности, а коэффициент  $\delta$  характеризует эффект Дюфура.

Рассматриваемая краевая задача является задачей на собственные значения относительно комплексного декремента  $\lambda$ . В силу представления возмущений в виде нормальных волн, для устойчивости основного течения необходимо и достаточно, чтобы у всех собственных значений  $\lambda$  мнимая часть  $\lambda_i$  была отрицательной.

### 3. Длинноволновые возмущения

С учетом уравнения неразрывности функции  $V_i, W_i, P_i, \Theta_i, C$  и декремент  $\lambda$  представимы в следующем виде (при  $\alpha \rightarrow 0$ ):

$$V_i = V_{i0} + \alpha V_{i1} + \dots, \quad W_i = \alpha W_{i1} + \alpha^2 W_{i2} + \dots, \quad \lambda = \lambda_0 + \alpha \lambda_1 + \dots, \\ \Theta_i = \Theta_{i0} + \alpha \Theta_{i1} + \dots, \quad P_i = P_{i0} + \alpha P_{i1} + \dots, \quad C = C_0 + \alpha C_1 + \dots,$$

После подстановки последнего разложения в систему (1), (2), задача для  $V_{i0}(\xi)$ ,  $W_{i1}(\xi)$  и  $\lambda_0$  отделяется и имеет вид:

$$\begin{aligned} -i\lambda_0 V_{10} &= \nu V''_{10}, & iV_{10} + W'_{11} &= 0, & -h \leq \xi \leq 0; \\ -i\lambda_0 V_{20} &= V''_{20}, & iV_{20} + W'_{21} &= 0, & 0 \leq \xi \leq 1; \\ V_{10}(-h) &= V_{20}(1) = 0, & V_{10}(0) &= V_{20}(0), & \nu\rho V'_{10}(0) &= V'_{20}(0), \\ W_{11}(-h) &= W_{21}(1) = 0, & W_{11}(0) &= W_{21}(0) = 0. \end{aligned}$$

Далее, умножая полученные уравнения на комплексно-сопряженные величины  $V_{10}^*, V_{20}^*$  и интегрируя на отрезках  $[-h; 0]$ ,  $[0; 1]$  соответственно, получим, что  $i\lambda_0 > 0$ , т.е. величина  $\lambda$  мнимая и  $\lambda_i < 0$  и длинноволновые возмущения затухают монотонно. На самом деле, с точностью до мультипликативной постоянной

$$V_{10}(\xi) = \sin(\mu\xi), \quad V_{20}(\xi) = \rho\sqrt{\nu} \sin(\mu\sqrt{\nu}\xi), \\ W_{11}(\xi) = \frac{i}{\mu}(\cos(\mu\xi) - 1), \quad W_{21}(\xi) = \frac{i\rho}{\mu}(\cos(\mu\sqrt{\nu}\xi) - 1),$$

где  $\mu = \mu_k = 2\pi k/h$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Причем на физические величины  $h$  и  $\nu$  наложено ограничение  $\sqrt{\nu}/h = n/k$ , где  $n = 1, 2, \dots$

Таким образом, имеется счетное число значений  $\mu_k$ , и  $\lambda_0 = \lambda_{0k} = -i\nu\mu_k^2$ .

### 4. Заключение

Методом линеаризации получены уравнения малых возмущений для течения двух жидкостей с учетом испарения на границе раздела. Найдено асимптотическое поведение комплексного декремента в длинноволновой области и доказана устойчивость решения. Получены аналитические представления нулевых приближений собственных функций в случае плоских возмущений.