УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Саланов М.А.

научный руководитель канд. физ.-мат. наук Полынцева С.В.

Сибирский федеральный университет

Рассматривается задача идентификации трёх коэффициентов параболического уравнения с условиями переопределения, заданными на двух различных гиперповерхностях.

Коэффициентные обратные задачи для параболических уравнений исследовались Ю.Е. Аниконовым, Н. Я. Безнощенко, Ю. Я. Беловым, В. М. Исаковым, А.И. Кожановым, В. Л. Камыниным, М.М. Лаврентьевым, А.И. Прилепко, В.Г. Романовым и другими авторами.

В работе, на основе условий переопределения, обратная задача приводится к прямой вспомогательной задаче Коши. В предположении достаточно гладких входных данных, с помощью метода слабой аппроксимации доказывается разрешимость прямой задачи.

Решение исходной обратной задачи выписывается в явном виде через решение прямой задачи. На этой основе доказывается теорема существования и единственности классического решения обратной задачи в классе гладких ограниченных функций.

Рассмотрим в полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z)|0 \le t \le T, x \in E_1, z \in E_1\}$ задачу Коши

$$u_t = q_1(t)u_{xx} + \alpha_1(t,x)u_x + \alpha_2(t,x)u_{zz} + \alpha_3(t,x)\big(q_2(t)u_z + q_3(t)u + f(t,x,z)\big), \quad (1)$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \qquad (x,z) \in E_2. \quad (2)$$

Функции $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$ заданы в $G_{[0,T]}$ и E_2 соответственно, коэффициенты $q_i(t)$, $i = 1,2,3,-$ непрерывные действительнозначные функции переменной t, $0 \le t \le T, T > 0, T = const.$ $E_n - n -$ мерное евклидово пространство, $n \ge 1, n \in Z$.

Коэффициенты $\alpha_1(t,x), \alpha_2(t,x), \alpha_3(t,x)$ и решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2) неизвестны.

Предположим, что выполняются условия переопределения:

$$u(t,x,a(t)) = \varphi(t,x), \ (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad (3)$$

$$u(t,x,b(t)) = \psi(t,x), \ (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad (4)$$

$$u(t,x,c(t)) = \omega(t,x), \ (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad (5)$$

где $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \le t \le T, x \in E_1\}, a(t), b(t), c(t) -$ различные действительнозначные, непрерывно дифференцируемые функции переменной t и $\varphi(t,x), \psi(t,x)$, $\omega(t,x) -$ заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0,x) = u_0(x,a(0)), \psi(0,x) = u_0(x,b(0)), \omega(0,x) = u_0(x,c(0)), \quad x \epsilon E_1. \quad (6)$$

Ниже мы рассматриваем классические (достаточно гладкие) решения.

Под решением обратной задачи $(1)-(5)$ в полосе $G_{[0,t^*]}, 0 < t^* \le T$, понимается четвёрка функций $\alpha_1(t,x), \alpha_2(t,x), \alpha_3(t,x), u(t,x,z)$, которые удовлетворяют соотношениям $(1)-(5)$.

Приведем задачу $(1)-(5)$ к некоторой прямой вспомогательной задаче. Используя условия $(3)-(5)$ находим коэффициенты $\alpha_1(t,x)$, $\alpha_2(t,x), \alpha_3(t,x)$ в виде

$$\alpha_1(t,x) = \frac{B_1}{A}; \ \alpha_2(t,x) = \frac{B_2}{A}; \ \alpha_3(t,x) = \frac{B_3}{A}, \quad (7)$$

где

$$A = \varphi_x u_{zz}\big(t,x,b(t)\big)M_3 + u_{zz}\big(t,x,a(t)\big)M_2\omega_x + M_1\psi_x u_{zz}\big(t,x,c(t)\big) -$$
$$-M_1 u_{zz}(t,x,b(t))\omega_x - u_{zz}(t,x,a(t))\psi_x M_3 - \varphi_x M_2 u_{zz}(t,x,c(t)),$$

$B_1 = \beta_1 u_{zz}\big(t,x,b(t)\big)M_3 + u_{zz}\big(t,x,a(t)\big)M_2\beta_3 +$

$+M_1\beta_2 u_{zz}\big(t,x,c(t)\big) - M_1 u_{zz}\big(t,x,b(t)\big)\beta_3 - u_{zz}\big(t,x,a(t)\big)\beta_2 M_3 - \beta_1 M_2 u_{zz}\big(t,x,c(t)\big),$

$B_2 = \varphi_x\beta_2 M_3 + \beta_1 M_2\omega_x + M_1\psi_x\beta_3 - M_1\beta_2\omega_x - \beta_1\psi_x M_3 - \varphi_x M_2\beta_3,$

$B_3 = \varphi_x u_{zz}\big(t,x,b(t)\big)\beta_3 + u_{zz}\big(t,x,a(t)\big)\beta_2\omega_x +$

$+\beta_1\psi_x u_{zz}\big(t,x,c(t)\big) - \beta_1 u_{zz}\big(t,x,b(t)\big)\omega_x - u_{zz}\big(t,x,a(t)\big)\psi_x\beta_3 - \varphi_x\beta_2 u_{zz}\big(t,x,c(t)\big),$

$\beta_1(t,x) = \varphi_t(t,x) - u_z\big(t,x,a(t)\big)a'(t) - q_1(t)\varphi_{xx}(t,x),$

$\beta_2(t,x) = \psi_t(t,x) - u_z\big(t,x,b(t)\big)b'(t) - q_1(t)\psi_{xx}(t,x),$

$\beta_3(t,x) = \omega_t(t,x) - u_z\big(t,x,c(t)\big)c'(t) - q_1(t)\omega_{xx}(t,x),$

$M_1(t,x) = q_2(t)u_z\big(t,x,a(t)\big) + q_3(t)\varphi(t,x) + f\big(t,x,a(t)\big),$

$M_2(t,x) = q_2(t)u_z\big(t,x,b(t)\big) + q_3(t)\psi(t,x) + f\big(t,x,b(t)\big),$

$M_3(t,x) = q_2(t)u_z\big(t,x,c(t)\big) + q_3(t)\omega(t,x) + f\big(t,x,c(t)\big).$

Подставим найденные коэффициенты $\alpha_1(t,x)$, $\alpha_2(t,x)$, $\alpha_3(t,x)$ в уравнение (1), получим прямую задачу

$$u_t = q_1(t)u_{xx} + \frac{B_1}{A}u_x + \frac{B_2}{A}u_{zz} + \frac{B_3}{A}\big(q_2(t)u_z + q_3(t)u + f(t,x,z)\big), \tag{8}$$

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{9}$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение и удовлетворяют ему

$$|q_i(t)| + \left|\frac{d^s}{dt^s}a(t)\right| + \left|\frac{d^s}{dt^s}b(t)\right| + \left|\frac{d^s}{dt^s}c(t)\right| + \left|\frac{\partial^{s+l}}{\partial t^s\partial x^l}\varphi(t,x)\right| +$$

$$+\left|\frac{\partial^{s+l}}{\partial t^s\partial x^l}\psi(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{s+l}}{\partial t^s\partial x^l}\omega(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k\partial x^m}u_0(x,z)\right| +$$

$$+\left|\frac{\partial^{k+m}}{\partial z^k\partial x^m}f(t,x,z)\right| \le C, (t,x,z) \in G_{[0,T]}, \tag{10}$$

где $m = \overline{0,4}, i = 1,2,3, s = 0,1,\ k = \overline{0,10-2m},\ C > 1, C -$ постоянная.

Предположим, что в $\Pi_{[0,T]}$

$$|\psi_{tt}(t,x)| + |\varphi_{tt}(t,x)| + |\omega_{tt}(t,x)| + \left|q_i'(t)\right| + \left|a''(t)\right| + \left|b''(t)\right| + \left|c''(t)\right| +$$
$$+|f_t(t,x,z)| \le C, \tag{11}$$

$$B_1(0,x) = \beta_1(0,x)u_{0_{zz}}\big(x,b(0)\big)M_3(0,x) + u_{0_{zz}}\big(x,a(0)\big)M_2(0,x)\beta_3(0,x) +$$

$$+M_1(0,x)\beta_2(0,x)u_{0_{zz}}\big(x,c(0)\big) - M_1(0,x)u_{0_{zz}}\big(x,b(0)\big)\beta_3(0,x) -$$

$$-u_{0_{zz}}\big(x,a(0)\big)\beta_2(0,x)M_3(0,x) - \beta_1(0,x)M_2(0,x)u_{0_{zz}}\big(x,c(0)\big) \ge \delta_1 > 0, \tag{12}$$

$$B_2(0,x) = \varphi_x(0,x)\beta_2(0,x)M_3(0,x) + \beta_1(0,x)M_2(0,x)\omega_x(0,x) +$$
$$+M_1(0,x)\psi_x(0,x)\beta_3(0,x) - M_1(0,x)\beta_2(0,x)\omega_x(0,x) - \beta_1(0,x)\psi_x(0,x)M_3(0,x) -$$
$$-\varphi_x(0,x)M_2(0,x)\beta_3(0,x) \ge \delta_2 > 0, \tag{13}$$

$$B_3(0,x) = \varphi_x(0,x)u_{0_{zz}}\big(x,b(0)\big)\beta_3(0,x) + u_{0_{zz}}\big(x,a(0)\big)\beta_2(0,x)\omega_x(0,x) +$$

$+\beta_1(0,x)\psi_x(0,x)u_{0_{zz}}\big(x,c(0)\big)-\beta_1(0,x)u_{0_{zz}}\big(x,b(0)\big)\omega_x(0,x)-$
$$-u_{0_{zz}}\big(x,a(0)\big)\psi_x(0,x)\beta_3(0,x)-\varphi_x(0,x)\beta_2(0,x)u_{0_{zz}}\big(x,c(0)\big)\geq\delta_3>0, \tag{14}$$
$$\frac{A(0,x)}{B_1(0,x)}\geq\delta_4>0,\frac{A(0,x)}{B_2(0,x)}\geq\delta_5>0,\frac{A(0,x)}{B_3(0,x)}\geq\delta_6>0, \tag{15}$$
где $A(0,x)=\varphi_x(0,x)u_{0_{zz}}\big(x,b(0)\big)M_3(0,x)+u_{0_{zz}}\big(x,a(0)\big)M_2(0,x)\omega_x(0,x)+$
$$+M_1(0,x)\psi_x(0,x)u_{0_{zz}}\big(x,c(0)\big)-M_1(0,x)u_{0_{zz}}\big(x,b(0)\big)\omega_x(0,x)-$$
$$-u_{0_{zz}}\big(x,a(0)\big)\psi_x(0,x)M_3(0,x)-\varphi_x(0,x)M_2(0,x)u_{0_{zz}}\big(x,c(0)\big),$$
$\delta_j-const,\delta_j>0,j=\overline{1,6}$.

С помощью метода слабой аппроксимации, на основании достаточно гладких входных данных (10), (11), условий $(12)-(15)$, доказано существование решения $u(t,x,z)$ прямой задачи (8), (9) в классе $C^{1,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,t^*]}\big)\cap C^{0,0,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,t^*]}\big)$, где
$$C^{1,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,t^*]}\big)=\{f(t,x,z)|\ f_t\in C\big(G_{[0,t^*]}\big),\frac{\partial^{r+m}}{\partial z^r\partial x^m}f\in C\big(G_{[0,t^*]}\big),m=\overline{0,2},r=\overline{0,2}\},$$
$$C^{0,0,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,t^*]}\big)=\{f(t,x,z)|\ \frac{\partial^k}{\partial z^k}f\in C\big(G_{[0,t^*]}\big),\ k=\overline{0,4}\ \}.$$
При этом, при $(t,x,z)\in G_{[0,t^*]}$, справедливы оценки
$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right|\leq C,\quad k=\overline{0,4}, \tag{16}$$
$$\left|\frac{\partial^{r+m}}{\partial z^r\partial x^m}u(t,x,z)\right|\leq C,\quad m=\overline{0,2},\quad r=0,1,2, \tag{17}$$
Докажем, что четвёрка функций $\alpha_1(t,x),\alpha_2(t,x),\alpha_3(t,x),u(t,x,z)$, где $\alpha_1(t,x),\alpha_2(t,x),\alpha_3(t,x)$ имеют вид (7), является решением обратной задачи $(1)-(5)$. Поскольку $u(t,x,z)$ – это решение прямой задачи (8), (9), то подставляя $\alpha_1(t,x),\alpha_2(t,x),\alpha_3(t,x),u(t,x,z)$ в (1), получим верное тождество.

Согласно (10), (16), (17) из (7), (8) получим, что четвёрка функций $\alpha_1(t,x),\alpha_2(t,x),\alpha_3(t,x),u(t,x,z)$ принадлежит классу
$$Z(t^*)=\big\{\alpha_1(t,x),\alpha_2(t,x),\alpha_3(t,x),u(t,x,z)\mid u\in C^{1,2,2}_{t,x,z}\big(G_{[0,t^*]}\big)\cap C^{0,0,4}_{t,x,z}\big(G_{[0,t^*]}\big);$$
$$\alpha_1(t,x),\alpha_2(t,x),\alpha_3(t,x)\in C^{0,2}_{t,x}\big(\Pi_{[0,t^*]}\big)\big\}$$
и удовлетворяет неравенствам
$$\sum_{k=0}^{4}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}u(t,x,z)\right|\leq C;\ \sum_{r=0}^{2}\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^{r+m}}{\partial z^r\partial x^m}u(t,x,z)\right|\leq C,(t,x,z)\in G_{[0,t^*]}, \tag{18}$$
$$\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\alpha_1(t,x)\right|+\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\alpha_2(t,x)\right|+\sum_{m=0}^{2}\left|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\alpha_3(t,x)\right|\leq C,(t,x)\in\Pi_{[0,t^*]}. \tag{19}$$
Здесь

$C^{0,2}_{t,x}\big(\Pi_{[0,t^*]}\big)=\left\{\alpha(t,x)\middle|\frac{\partial^m}{\partial x^m}\alpha(t,x)\in C\ \big(\Pi_{[0,t^*]}\big),\ m=\overline{0,2}\right\}$, C вообще говоря различные постоянные, $C>1$.

Доказано выполнение условий переопределения $(3)-(5)$.

Имеет место

Теорема. Пусть выполняются условия (6), $(10)-(15)$. Тогда существует единственное решение $\alpha_1(t,x),\ \alpha_2(t,x),\alpha_3(t,x),\ u(t,x,z)$ задачи $(1)-(5)$ в классе $Z(t^*)$, удовлетворяющее соотношениям (18), (19). Постоянная $t^*, 0<t^*\leq T$, зависит от постоянных $C,\delta_j,\ j=\overline{1,6}$, из соотношений $(10)-(15)$.