УДК 517.55

О ВЛОЖЕНИИ ДВУМЕРНЫХ ТОРОВ И ПРИМЕНЕНИЕ К КВАНТОВЫМ КОМПЬЮТЕРАМ

Керп А.С.
Научный руководитель д-р физ.-мат. наук Цих А. К.,
Аспирант кафедры ТФ СФУ КуликовВ. Р.
Сибирский федеральный университет

ВВЕДЕНИЕ

Квантовая информатика — новый раздел науки, возникший на стыке квантовой механики, алгоритмов и теории информации. В квантовой информатике изучаются общие принципы и законы, управляющие динамикой сложных квантовых систем. Квантовый компьютер — вычислительное устройство, работающее на основе принципов квантовой механики.

Квантовый компьютер использует для вычисления неклассические алгоритмы, которые реализуются посредством неклассических логических элементов.

Например, классический логический элемент, отражающий переход к отрицанию, изображается следующей схемой:

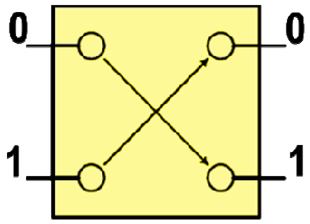

Рис. 1

Поскольку в логике отрицание высказывания образуется с помощью частицы НЕ, изображенный элемент будем обозначать символом НЕ.

В рамках действительного анализа нельзя построить логический элемент $\sqrt{\text{НЕ}}$, т.е такой, для которого $\sqrt{\text{НЕ}} \times \sqrt{\text{НЕ}} = \text{НЕ}$, где под умножением подразумевается последовательное применения элемента. Иными словами, даже в рамках многозначной логики, основанной на классической теории вероятности, уравнение$X \times X = \text{НЕ}$ не разрешимо. Докажем это.

Отражающая это уравнение техническая схема такая:

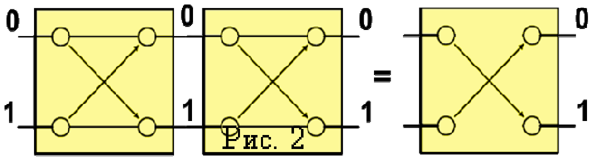

Рис. 2

Здесь слева подразумеваются две копии одного (неизвестного) логического элемента X.

Предполагается, что переходы $0 \to 0, 0 \to 1, 1 \to 0, 1 \to 1$ происходят с вероятностями P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}(см. Рис.3).

Для элемента «НЕ» имеем:

$P_{00}=P_{11}=0$; $P_{01}=P_{10}=1$

Следовательно, для удовлетворения равенства$X \times X =$ НЕполучаем систему уравнений:

$P_{00}P_{00}+P_{01}P_{10}=0$;

$P_{00}P_{01}+P_{01}P_{11}=1$;

$P_{10}P_{00}+P_{11}P_{10}=1$;

$P_{11}P_{11}+P_{10}P_{01}=0$.

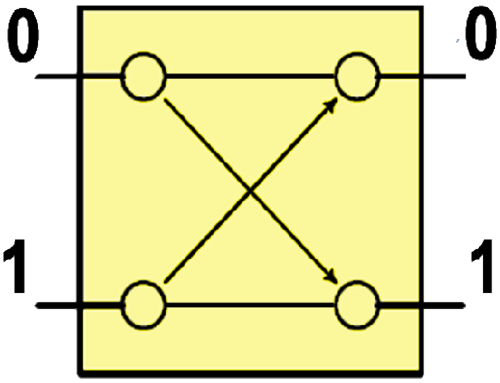

Рис. 3

Данная схема нереализуема для вещественных неотрицательных значений вероятностей P_{ij}.

Путь к реализации равенства подсказывает квантовая механика, в которой под амплитудой вероятности перехода i→j подразумевает комплексное число c_{ij}, для которого $P_{ij} = \left|c_{ij}\right|^2$. Таким образом, если в приведенной системе уравнений заменить P_{ij} на комплексные числа c_{ij}, то тогда следует рассмотреть уравнения:

$$\begin{cases} 0 = |c_{00}c_{00} + c_{01}c_{10}|^2 \\ 1 = |c_{00}c_{01} + c_{01}c_{11}|^2 \\ 1 = |c_{10}c_{00} + c_{11}c_{10}|^2 \\ 0 = |c_{11}c_{11} + c_{10}c_{01}|^2 \end{cases} (*)$$

Некоторые примеры корней данной системы уравнений были представлены в книге Гуца[2]:

$$c_{00} = c_{11} = {i}/{\sqrt{2}};\ c_{01} = {e^{-i\alpha}}/{\sqrt{2}};\ c_{10} = {e^{i\alpha}}/{\sqrt{2}}.$$

Ранее нами была доказана теорема о полном решении системы (*):

Теорема 1. *Все комплексные решения системы (*) параметризуются в следующем виде через 2 параметра* $\alpha, \beta \in [0; 2\pi]$:$c_{00} = c_{11} = e^{i\alpha}/\sqrt{2}$, $c_{01} = e^{i\beta}/\sqrt{2}$, $c_{10} = e^{i(\pi+2\alpha-\beta)}/\sqrt{2}$

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Были рассмотрены следующие задачи:

1. Найти математический язык для реализации последовательных применений неклассического элемента X, то есть $X^2, X^3, \ldots$

2. Найти $\sqrt[n]{\text{НЕ}}, n \in \mathbb{N}$, то есть указать решения логического уравнения $X^n =$ НЕ.

3. Выяснить вопрос о всех решениях уравнения $X^n = \text{НЕ}$ для $n \in \mathbb{N}$.

Лемма 1. *Последовательное применение* n *раз неклассического элемента* X *соответствует возведению в* n*-ю степень комплексной матрицы* $C = \begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix}$, *то есть* X^n *соответствует* C^n.

$$\begin{pmatrix} c_{00} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} c_{00}c_{00} + c_{01}c_{10} & c_{00}c_{01} + c_{01}c_{11} \\ c_{10}c_{00} + c_{11}c_{10} & c_{11}c_{11} + c_{10}c_{01} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i(\alpha-\beta)} \\ e^{i(\alpha+\beta)} & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 2. *Частными решениями матричного уравнения* $X^n = \text{НЕ}$ *являются следующие матрицы:*

$$X_{g,p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} e^{i\frac{\alpha+\pi(2g+p)}{n}} \left(1 + e^{i\frac{\pi}{n}}\right) & \frac{1}{2} e^{i\left(\frac{\alpha+\pi(2g+p)}{n} - \beta - \pi p\right)} \left(1 - e^{i\frac{\pi}{n}}\right) \\ \frac{1}{2} e^{i\left(\frac{\alpha+\pi(2g+p)}{n} + \beta + \pi p\right)} \left(1 - e^{i\frac{\pi}{n}}\right) & \frac{1}{2} e^{i\frac{\alpha+\pi(2g+p)}{n}} \left(1 + e^{i\frac{\pi}{n}}\right) \end{pmatrix},$$

где $g = 0, \dots, n-1;\ p = 0, 1.$

При нечетных n *появляется дополнительный набор решений:*

$$X'_{g,p} = \begin{pmatrix} 0 & e^{i(\frac{\alpha+2\pi(2g+p)}{n} - \beta - \pi p)} \\ e^{i(\frac{\alpha+\pi(2g+p)}{n} + \beta + \pi p)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 3.*Все решения матричного уравнения* $X^n = \text{НЕ}$ *описываются в виде:*

$$\begin{pmatrix} \frac{t_j e^{i\frac{\alpha+2\pi k}{n}}}{1+t_j} & \frac{e^{i(\frac{\alpha+2\pi k}{n} - \beta)}}{1+t_j} \\ \frac{e^{i(\frac{\alpha+2\pi k}{n} + \beta)}}{1+t_j} & \frac{t_j e^{i\frac{\alpha+2\pi k}{n}}}{1+t_j} \end{pmatrix},$$

где k=0…n-1 и j=0…n-1, а t_j *– решения уравнения* $\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} t^{n-2k} = 0.$