УДК 517.55

О ВЫЧИСЛЕНИИ ВЫЧЕТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ, СВЯЗАННЫХ С СИСТЕМОЙ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Мышкина Е. К.
научный руководитель доктор физ.-мат. наук, профессор Кытманов А. М.
Сибирский федеральный университет

Рассмотрим систему функций

$$f_i(z) = (q_i + Q_i(z))e^{P_i(z)}, \qquad i = 1, \dots, n,$$

где $q_i(z_1, \dots, z_n)$ – выражение вида

$$q_i = (1 - a_{i1}z_1)^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot (1 - a_{in}z_n)^{m_{in}} \qquad i = 1, \dots, n,$$

m_{ij}- натуральные числа,$a_{ij} \neq 0$- комплексные числа, различные при каждом фиксированном $j, P_i(z)$ и$Q_i(z)$ -целые функции.

Система уравнений

$$q_i(z) = 0, \qquad i = 1, \dots, n$$

имеетn!изолированныхкорней, иэтикорниравны$a_J = (a_{1i_1}, \dots a_{ni_n})$, где$J = (i_1, \dots, i_n)$ -мультииндекс, являющийсяперестановкой$(1, \dots, n)$.

ПустьΓ_q цикл

$$\Gamma_q = \{z \in \mathbb{C}^n: |q_i| = |(1 - a_{i1}z_1)^{m_{i1}} \cdot \dots \cdot (1 - a_{in}z_n)^{m_{in}}| = r, \quad r > 0, \quad i = 1, \dots, n\},$$

Этот цикл имеет конечное число связных компактных компонент при достаточно малых rи эти локальные циклы представляют собой гладкие поверхности размерности n для почти всех r.Поэтому цикл Γ_qгомологичен сумме циклов

$$\Gamma_q \approx \sum_J \Gamma_{q,a_J}$$

Обозначим через J_γ*вычетные интегралы* вида

$$J_\gamma = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\Gamma_q} \frac{1}{z^{\gamma+I}} \cdot \frac{df}{f} = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \int\limits_{\Gamma_q} \frac{1}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot \dots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{df_1}{f_1} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n},$$

Теорема 1. При сделанных предположениях для функций f_i, справедливы формулыдляJ_γв виде сходящихся рядов:

$$J_\gamma = \sum_{\|K\| \geq 0} (-1)^{\|K\|} \sum_J (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(K,J)!} \cdot \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial z^\beta} \left[\frac{\Delta}{z_1^{\gamma_1+1} \cdot \dots \cdot z_n^{\gamma_n+1}} \cdot \frac{Q^K(J)}{q^{K+I}(J)} \right]_{z=a_J},$$

где $(-1)^{s(J)} = 1$,когда J–четная перестановка и $(-1)^{s(J)} = -1$,когда J–нечетная перестановка $q^{K+I}(J) = q_1^{k_1+1}[i_1] \cdot \dots \cdot q_n^{k_n+1}[i_n]$, а $q_j[i_j]$–это произведение всех $\left(1 - a_{j1}z_1\right)^{m_{j1}} \cdot \dots \cdot \left(1 - a_{jn}z_n\right)^{m_{jn}}$кроме $\left(1 - a_{ji_j}z_1\right)^{m_{ji_j}}$, Δ–якобиан нашей системы.

$$K = (k_1, \dots, k_n), \|K\| = k_1 + \dots + k_n,$$
$$\beta(K,J) = (m_{1i_1} \cdot (k_{i1} + 1) - 1, \dots m_{ni_n} \cdot (k_{in} + 1) - 1)$$

$$\beta(K,J)! = \prod_j \left(m_{ji_j} \cdot (k_{ij}+1) - 1\right)!$$

$$\frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial z^\beta} = \frac{\partial^{m_{1i_1}\cdot(k_{i1}+1)-1+\dots+m_{ni_n}\cdot(k_{in}+1)-1}}{\partial z_1^{m_{1i_1}\cdot(k_{i1}+1)-1} \cdot \ldots \cdot \partial z_n^{m_{ni_n}\cdot(k_{in}+1)-1}}.$$

Предположим теперь, что$Q_i(z)$ – многочлены вида

$$Q_i(z) = z_1 \cdot \ldots \cdot z_n \sum_{\|\alpha\|>0} C_\alpha^i z^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$,а $z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdot z_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot z_n^{\alpha_n}$и $deg_{z_j} Q_i \le m_{ij} \quad i,j = 1, \ldots, n$.

Сделаем теперь замену $z_j = \frac{1}{w_j}$, предполагая, что все $w_j \ne 0$.

Обозначим через $\widetilde{G_\iota}$функции

$$\widetilde{G_\iota}(w) = \widetilde{q_\iota}(w) + \widetilde{Q_\iota}(w),$$

где $\widetilde{q_\iota}(w)$ функции $\widetilde{q_\iota}(w) = (w_1 - a_{i1})^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot (w_n - a_{in})^{m_{in}}$,
Q_iмногочлены вида $\widetilde{Q_\iota} = w_1^{m_{i1}} \cdot \ldots \cdot w_n^{m_{in}} \cdot Q_i\left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right)$, поэтому $deg_w \widetilde{Q_\iota} < m_{ij}, \quad i,j = 1, \ldots, n$.

Теорема 2. Пусть $\widetilde{\Delta}$ *– якобиан системы функций* $\widetilde{G_1}(w), \ldots, \widetilde{G_n}(w)$. *Тогда*

$$J_\gamma = \sum_{K\epsilon\Re} (-1)^{\|K\|} \sum_J (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(K,J)!} \cdot \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial w^\beta} \left[\widetilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}^K(J)}{\tilde{q}^{K+I}(J)}\right]_{w=a_J}$$

где множество индексов$\Re = \{K = (k_1, \ldots, k_n) \mid \exists i: \gamma_i + 2 > \|K\|, \ i = 1, \ldots, n\}$.

Обозначим через $z_j = z_{j1}, \ldots, z_{jn}, \quad j = 1, \ldots, p$, - корни нашей системы с функциямиQ_i определенного вида, не лежащими на координатных плоскостях. Этих корней конечное число поскольку, если w_j не лежит на координатных плоскостях, то $z_{jm} = \frac{1}{w_{jm}}, \ m = 1, \ldots, n$.Поэтому $p \le s$.

Теорема 3. Для системы с функциями f_j, Q_j, *определенных выше справедливы формулы*

$$\sum_{j=1}^p \frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot z_{jn}^{\gamma_n+1}} =$$

$$= \sum_{K\epsilon\Re} (-1)^{\|K\|} \sum_J (-1)^{s(J)} \frac{1}{\beta(K,J)!} \cdot \frac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial w^\beta} \left[\widetilde{\Delta} \cdot w_1^{\gamma_1+1} \cdot \ldots \cdot w_n^{\gamma_n+1} \cdot \frac{\tilde{Q}^K(J)}{\tilde{q}^{K+I}(J)}\right]_{w=a_J}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 12-01-00007-а