УДК 735.29

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОБРАТНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ЗАДАЧИ

Зуева Н. Ю.
научный руководитель канд. физ.-мат. наукРаспопов В. Е.
Сибирский федеральный университет

В работе численно решена обратная коэффициентная задача для уравнения параболического типа. Описан численный метод решения поставленной обратной задачи. Рассмотрен регуляризирующий алгоритм решения обратной задачи, приводящий к решению систем линейных алгебраических уравнений с хорошо обусловленными и плохо обусловленными (в случае «малых» шагов сетки) матрицами. Для решения плохо обусловленных задач применен метод регуляризации по А. Н. Тихонову.

Среди математических задач можно выделить класс задач, в которых малые погрешности висходных данных влекут за собой большие погрешности вычислений. Они характеризуются тем, что решение может быть неустойчиво к таким изменениям, а то и вовсе не существовать. Эти задачи принадлежат к классу некорректно поставленных задач.

Сформулируем обратную задачу нахождения коэффициента переноса для одномерного уравнения теплопроводности с граничными условиями 1-го рода. Ставится задача нахождения функции $a(t)$. Для уравнения теплопроводности, заданного на квадратной области D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(t)\frac{\partial u}{\partial x} + f(x,t), \qquad D = \{\alpha \le x \le \beta; \alpha \le t \le \beta\},$$

рассматривается первая начально-краевая задача:

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \alpha \le x \le \beta,$$
$$u(\alpha,t) = \psi_1(t), \qquad \alpha \le t \le \beta,$$
$$u(\beta,t) = \psi_2(t), \qquad \alpha \le t \le \beta,$$

с интегральным условием переопределения:

$$\int_\alpha^\beta u(x,t)dx = \beta(t).$$

Поставленную задачу будем решать методом конечных разностей. На дискретной области выбираем неявную разностную схему(аппроксимирующую данную задачу с $O(\tau + h^2)$порядком точности), которая является абсолютно устойчивой:

$$\frac{y_j^{n+1} - y_j^n}{\tau} = \frac{y_{j+1}^{n+1} - 2y_j^{n+1} + y_{j-1}^{n+1}}{h^2} + a^{n+1}\frac{y_{j+1}^n - y_{j-1}^n}{2h} + f_j^n,$$

начальное и граничные условия аппроксимируем следующим образом:

$$y_j^0 = u_0(x_j), \qquad j = \overline{0,M},$$
$$y_0^{n+1} = \psi_1(t_{n+1}), \qquad y_M^{n+1} = \psi_2(t_{n+1}), \qquad n = \overline{0,(N-1)}.$$

Интегральное условие переопределения аппроксимируем с помощью квадратурной формулы трапеций:

$$\left(\frac{y_0^{n+1} + y_M^{n+1}}{2} + \sum_{j=1}^{M-1}(y_j^{n+1})\right)h = \beta(t_{n+1}),$$

имеющей второй порядок аппроксимации поh.

Получили систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} b & c & 0 & & 0 & 0 & K_j^n \\ a & b & c & \cdots & 0 & 0 & K_j^n \\ 0 & a & b & & 0 & 0 & K_j^n \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & & b & c & K_{M-2}^n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b & K_{M-1}^n \\ h & h & h & & h & h & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} y_1^{n+1} \\ y_2^{n+1} \\ y_3^{n+1} \\ \vdots \\ y_{M-2}^{n+1} \\ y_{M-1}^{n+1} \\ a^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^n \\ y_2^n \\ y_3^n \\ \vdots \\ y_{M-2}^n \\ y_{M-1}^n \\ B_{n+1} \end{pmatrix} + \tau * \begin{pmatrix} f_1^n \\ f_1^n \\ f_1^n \\ \vdots \\ f_{M-2}^n \\ f_{M-1}^n \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{y_0^{n+1}}{h^2} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{y_M^{n+1}}{h^2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$a = -\frac{\tau}{h^2} = c, \quad b = \frac{1}{\tau} + \frac{2}{h^2}, \quad K_j^n = -\frac{\tau\left(y_{j+1}^n - y_{j-1}^n\right)}{2h},$$

$$B_{n+1} = \beta(t_{n+1}) - \frac{h(y_0^{n+1} - y_M^{n+1})}{2}.$$

Полученную систему линейных алгебраических уравнений $Ay = B$решаем методом исключения.Однако,при малых параметрахh матрица A становится плохо обусловленной, так как элементы последней строки близки к нулю. В связи с этим в данной ситуации требуется вводить регуляризирующие алгоритмы, с помощью которых можно решать поставленную задачу при малых h.

Идея метода регуляризации состоит в замене исходной некорректной задачи на задачу о минимизации следующей функции:

$\Omega(Y,\lambda) \ = \ |AY - B| + \lambda|Y - Y_0|,$

где λ — малый положительный параметр регуляризации, который необходимо подобрать определенным способом. Минимизируя функцию $\Omega(Y,\lambda)$, можно получить регуляризованное решение Y (A), зависящее от параметра λ. Из формулы хорошо ясен его смысл: при малых $\lambda \sim 0$задача близка к (некорректной) исходной задаче, а при большихλ, задача поставлена корректно, но ее решение далеко от решения исходной обратной задачи. Очевидно, что на практике необходимо выбирать промежуточные λ. Можно показать, что в линейном случае задача о минимизации функционала $\Omega(Y,\lambda)$ может быть сведена к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$(A^T A + \lambda I)Y = A^T B \qquad (1)$$

Заменим нашу систему линейных алгебраических уравнений $Ay = B$ системой (1).

Для определения параметра λбудем использовать метод выбора параметра регуляризации по L-кривой (L-curve method), где параметр регуляризации выбирается в точке с максимальной кривизной линии L , строящейся на графике:
$L = \{(log(\|x_\lambda\|), \qquad log(\|Ax_\lambda - B\|)\}.$

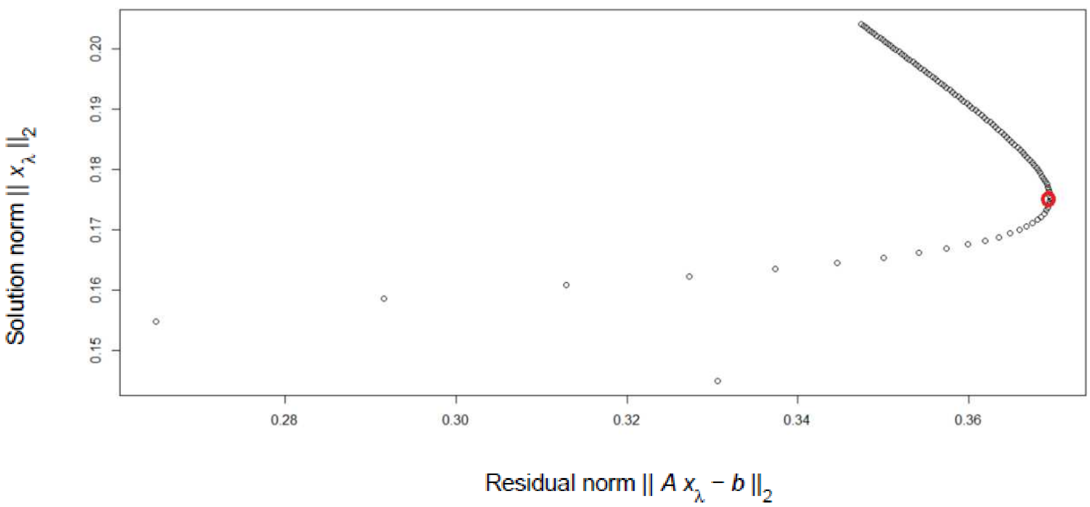

Рис. 1

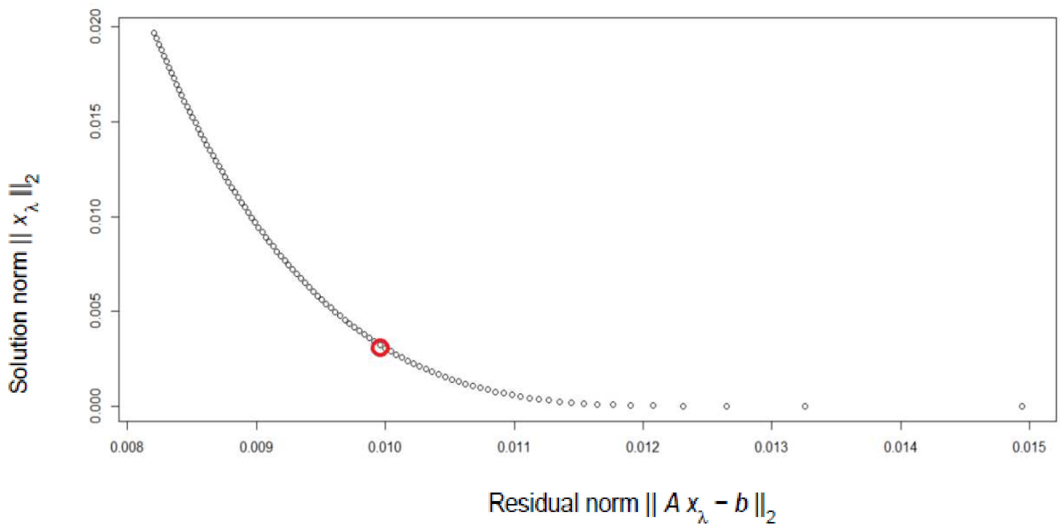

Рис. 2

На рисунках 1, 2 изображены характерные графики L-кривой. В отмеченных точках наблюдается максимальная кривизна линии, именно в этих точках требуется выбирать соответствующий параметр регуляризацииλ.

Приведем результаты вычислительного эксперимента. Применим метод регуляризации А.Н. Тихонова свыбором параметра регуляризацииλ по L-кривой на малой пространственно-временной области. Показаны результаты численного эксперимента для некоторых пробных функций. Установлена сходимость численного решения к точному при «больших» h, а так же сходимость метода регуляризации А. Н. Тихонова с выбором параметра регуляризации по L-кривой при «малых» h(с увеличением количества разбиений снижаются абсолютная и относительная погрешности).В таблицах 1, 2 показаны результаты вычислительных экспериментов для различныхтестовых функций $u(x,t)$.

1. $u(x,t) = e^{-t}\sin(x)$, $\quad 0 < x < 0.001,$
   $0 < t < 0.001.$

h, шаг аппроксимации	Абсолютная погрешность $\lvert u_n - u_e \rvert$	Относительная погрешность $\frac{\lvert u_n - u_e \rvert}{u_n}$
0.0001	6.197219e-05	0.1304677
0.00005	3.916344e-05	0.0803586
0.00002	1.811362e-05	0.03660015
0.000015	1.330717e-05	0.02681028
0.00001	Число обусловленности= 2.21989e+16 =>используем метод регуляризации	
0.00001	1.08707e-05	0.01136276
0.000007	7.577085e-06	0.007945634
0.000001	8.233545e-07	0.000562841

Табл. 1. Результаты вычислений для первой тестовой функции.

2. $u(x,t) = x^2 + t^2$, $0 < x < 0.01$, $0 < t < 0.01$.

Н, шаг аппроксимации	Абсолютная погрешность $\lvert u_n - u_e \rvert$	Относительная погрешность $\frac{\lvert u_n - u_e \rvert}{u_n}$
0.001	1.000298e-05	0.3828619
0.0005	7.022792e-06	0.2795348
0.0002	3.463134e-06	0.0574696
0.00015	2.576432e-06	0.0197805
0.00001	Число обусловленности= 9.40783e+19 =>используем метод регуляризации	
0.00001	1.961168e-06	0.01960302
0.000007	4.841259e-05	0.00271830
0.000001	6.193781e-04	0.00063843

Табл. 2. Результаты вычислений для второй тестовой функции.

Список литературы

1. Самарский А. А., Николаев Е. С., Методы решения сеточных уравнений, М., 1978.
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач// М.: Наука, 1979.
3. Cannon J. R., Duchateau P. Determination unknowing coefficients in a none-liner conduction problem // SIAM J. appl. math. 1973. V. 24, N 3. P. 298-314.
4. HansenP. C.Section for Scientific Computing [Электронныйресурс]// Электрон. текст. дан - Chapter 5: Parameter Choice Methods -Режимдоступа: http://www.imm.dtu.dk/~pcha/DIP/chap5.pdf