УДК 735.29

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ЭКОСИСТЕМЫ ВОДОЁМА

Сидлик А. И.

научный руководитель канд. физ.-мат. наук, профессорРаспопов В. Е.

Сибирский федеральный университет

В последнее время мы стали свидетелями своеобразного «экологического взрыва» - во всем мире резко возрос интерес к экологическим проблемам. И это не удивительно, поскольку понятие «человек», «человечество» нельзя отделить от понятия «окружающая среда».

Человечество слишком медленно подходит к пониманию масштабов опасности, которую создает легкомысленное отношение к окружающей среде. Между тем решение (если оно еще возможно) таких грозных глобальных проблем, как экологические, требует неотложных энергичных совместных усилий международных организаций, государств, регионов, общественности.

В результате усиленного антропогенного воздействия на водоемы формирование качества воды в настоящее время является одной из важнейших проблем народного хозяйства. Возникающие в связи с этим задачи описания процессов формирования качества воды и попытки составления краткосрочных и долгосрочных прогнозов качества необходимо требуют применения математического аппарата, а именно - математического моделирования.

Математическое моделирование - один из основных инструментов системного анализа, позволяющий в ряде случаев избежать трудоемких и дорогостоящих натурных экспериментов. Идея моделирования заключается в замещении изучаемого объекта его аналогом. Математические модели - формализуют закономерности динамики объекта в виде численных соотношений, при этом реализуется фундаментальное понятие наблюдаемости, которое можно трактовать, как возможность для внешнего наблюдателя получать информацию о прошлом состоянии объекта, на ее основе предвидеть его поведение в будущем и управлять им.

Имитационные модели (англ. simulationmodels) - один из основных классов математического моделирования. Назначение имитационных моделей - максимальное приближение модели к конкретному (чаще всего уникальному) экологическому объекту и достижение максимальной точности его описания.

Круговорот биогенных (жизненно важных)элементов,т.е.таких элементов из которых строятся живые организмы, представляет собой ключевой механизм формирования качества воды. В числе биогенных элементов азот и фосфор занимают главенствующее положение, и зачастую от количества и характера их соединений зависит общая продуктивность водоема. Отсюда вытекает насущная потребность в изучении круговорота этих биогенных элементов с помощью математических методов.

На Базовой кафедре вычислительных и информационных технологий Сибирского федерального университета разработана точечная модель экосистемы водоема. Эта модель учитывает следующие процессы, происходящие в водоеме: рост организмов, смертность, дыхание (выделение), переходы по пищевой цепи, оседание веществ,изменение биогенных веществ.

Модель представляет собой систему из десяти обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих изменения концентраций зеленых водорослей (CA0), сине-зеленых (CA1) и диатомовых (CA2) водорослей, зоопланктона (CZ), бактериопланктона (CB), детрита (CD),растворенных в воде фосфора(PS), азота (NS), органики (POB) и кислорода (CO2) .

В данной работе рассматриваетсямодифицированная система уравнений, содержащая девять динамических переменных и, соответственно, девять уравнений.

Основные уравнения математической модели приведены в работе: Распопов В. Е., Сапожников В.А. Математическая модель экосистемы Красноярского водохранилища / Красноярское водохранилище: мониторинг, биота, качество вод, Красноярск: Сиб. фед. ун-т., 2008.

Изучение чувствительности моделей состоит, главным образом, в исследовании особенностей динамики экосистем внутри областей, ограниченных бифуркационными поверхностями и является дополнительным исследованием к качественному исследованию моделей экосистем, в частности, к проблеме устойчивости.

Функции чувствительности выявляют глубокие особенности динамики, которые не усматриваются при обычном переборе параметров, а качественные свойства моделей, обнаруженные функциями чувствительности, существенно уменьшают неопределенность моделей обычного типа, обусловленную неточностью исходных параметров (основная трудность имитационного моделирования).

Отметим, что аппарат теории чувствительности оказывается адекватным сути задачи моделирования антропогенного воздействия на экосистему - прогноз антропогенного воздействия на экосистему, собственно говоря, и заключается в выявлении тенденции изменения состояния экосистемы.

Если водная экологическая система описывается уравнениями состояния:

$$\dot{\mathrm{X}} = \mathrm{f}(\mathrm{X}, \mathrm{P}, \mathrm{t}) \tag{1}$$

при $\mathrm{X}(t_0) = \alpha$, где X – вектор состояний, P – вектор параметров размерности m, t – время, $\mathrm{X}(t_0)$ – вектор начальных состояний, то дифференциальные уравнения чувствительности первого порядка получаются путем дифференцирования уравнений модели по компонентам P_i:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial P_i}\right) = \frac{\partial f_j}{\partial P_i} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial P_i}\,, \tag{2}$$

и по компонентам вектора начальных состояний:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_i}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i}\,. \tag{3}$$

Начальные условия для уравнений (2) и (3):

$$\frac{\partial x_j}{\partial P_i}(t_0) = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_i}(t_0) = \delta_{ij}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \tag{5}$$

Уравнения (2) и (3) решаются совместно с уравнениями состояния (1).Полученные функции чувствительности $\frac{\partial x_j}{\partial P_i}$ и $\frac{\partial x_j}{\partial \alpha_i}$ применяются для изучения влияния антропогенных факторов.

Приведем для примера уравнения, которым удовлетворяют функции чувствительности динамических переменных от коэффициента r=maxmA0 (коэффициента скорости роста зеленых водорослей).

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial CA0}{\partial(rA0)}\right) = S0(T)\cdot L1(E)\cdot\frac{PS}{KP0+PS}\cdot CA0 + (mA0+RA0-MA0)\cdot\frac{\partial CA0}{\partial(rA0)} + \\
\qquad +\alpha_0\cdot CA1\cdot\frac{\partial CA0}{\partial(rA0)} + \alpha_1\cdot CA0\cdot\frac{\partial CA1}{\partial(rA0)} + rA0\cdot S0(T)\cdot L1(E)\cdot\frac{KP0}{(KP0+PS)^2}\cdot CA0\cdot\frac{\partial PS}{\partial(rA0)}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial CA1}{\partial(rA0)}\right) = (mA1-RA1-MA1)\cdot\frac{\partial CA1}{\partial(rA0)} - \alpha_0\cdot CA1\cdot\frac{\partial CA0}{\partial(rA0)} - \alpha_1\cdot CA0\cdot\frac{\partial CA1}{\partial(rA0)} + \\
\qquad +mA1max\cdot S1(T)\cdot L1(E)\cdot\frac{KP1}{(KP1+PS)^2}\cdot CA1\cdot\left(\frac{\partial PS}{\partial(rA0)}\right), \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial CA2}{\partial(rA0)}\right) = (mA2-RA2-SA2-MA2)\cdot\left(\frac{\partial CA2}{\partial(rA0)}\right) - \frac{mZ}{Y1}\cdot\left(\frac{\partial CZ}{\partial(rA0)}\right) + mA2max\cdot S1(T)\cdot L1(E)\cdot \\
\cdot\left[\frac{KN2}{(KN2+NS)^2}\cdot\frac{PS}{KP2+PS}\cdot\left(\frac{\partial CZ}{\partial(rA0)}\right) + \frac{NS}{KN2+NS}\cdot\frac{KP2}{(KP2+PS)^2}\cdot\left(\frac{\partial PS}{\partial(rA0)}\right)\right]\cdot CA2 - mZmax\cdot S3(T)\cdot \\
\quad\cdot\left[\frac{CON}{(CON+A1\cdot CD+A2\cdot CB+A3\cdot CA2)^2}\cdot\left(A1\cdot\frac{\partial CD}{\partial(rA0)} + A2\cdot\frac{\partial CB}{\partial(rA0)} + A3\cdot\frac{\partial CA2}{\partial(rA0)}\right)\right]\cdot\frac{CZ}{Y1}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial CZ}{\partial(rA0)}\right) = (mZ-RZ-MZ)\cdot\frac{\partial CZ}{\partial(rA0)} + mZmax\cdot S3(T)\cdot \\
\cdot\left[\frac{CON}{(CON+A1\cdot CD+A2\cdot CB+A3\cdot CA2)^2}\cdot\left(A1\cdot\frac{\partial CD}{\partial(rA0)} + A2\cdot\frac{\partial CB}{\partial(rA0)} + A3\cdot\frac{\partial CA2}{\partial(rA0)}\right)\right]\cdot CZ, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial CB}{\partial(rA0)}\right) = (mB-RB-MB)\cdot\frac{\partial CB}{\partial(rA0)} - \frac{mZ}{Y2}\cdot\frac{\partial CZ}{\partial(rA0)} + mBmax\cdot S4(T)\cdot \\
\cdot\left[\frac{KMD}{(KMD+CD)^2}\cdot\frac{\partial CD}{\partial(rA0)} + \frac{KOB}{(KOB+POB)^2}\cdot\frac{\partial POB}{\partial(rA0)}\right]\cdot CB - mZmax\cdot S3(T)\cdot \\
\cdot\left[\frac{CON}{(CON+A1\cdot CD+A2\cdot CB+A3\cdot CA2)^2}\cdot\left(A1\cdot\frac{\partial CD}{\partial(rA0)} + A2\cdot\frac{\partial CB}{\partial(rA0)} + A3\cdot\frac{\partial CA2}{\partial(rA0)}\right)\right]\cdot\frac{CZ}{Y2}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial CD}{\partial(rA0)}\right) = MA0\cdot\frac{\partial CA0}{\partial(rA0)} + MA1\cdot\frac{\partial CA1}{\partial(rA0)} + MA2\cdot\frac{\partial CA2}{\partial(rA0)} + MZ\cdot\frac{\partial CZ}{\partial(rA0)} + MB\cdot\frac{\partial CB}{\partial(rA0)} - \\
-SA3\cdot\frac{\partial CD}{\partial(rA0)} - \frac{mB}{Y3}\cdot\frac{\partial CB}{\partial(rA0)} - \frac{mZ}{Y4}\cdot\frac{\partial CZ}{\partial(rA0)} - mBmax\cdot S4(T)\cdot \qquad\qquad\qquad\qquad (6) \\
\cdot\left[\frac{KMD}{(KMD+CD)^2}\cdot\frac{\partial CD}{\partial(rA0)} + \frac{KOB}{(KOB+POB)^2}\cdot\frac{\partial POB}{\partial(rA0)}\right]\cdot\frac{CB}{Y3} - mZmax\cdot S3(T)\cdot \\
\cdot\left[\frac{CON}{(CON+A1\cdot CD+A2\cdot CB+A3\cdot CA2)^2}\cdot\left(A1\cdot\frac{\partial CD}{\partial(rA0)} + A2\cdot\frac{\partial CB}{\partial(rA0)} + A3\cdot\frac{\partial CA2}{\partial(rA0)}\right)\right]\cdot\frac{CZ}{Y4}, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial PS}{\partial(rA0)}\right) = -SO(T)\cdot L1(E)\cdot\frac{PS}{KP0+PS}\cdot PPO\cdot CA0 - (mA0-RA0)\cdot PP0\cdot\frac{\partial CA0}{\partial(rA0)} - \\
-(mA1-RA1)\cdot PP1\cdot\frac{\partial CA1}{\partial(rA0)} - (mA2-RA2)\cdot PP2\cdot\frac{KMD}{(KMD+CD)^2} + RZ\cdot PP3\cdot\frac{\partial CZ}{\partial(rA0)} + \\
\qquad +RB\cdot PP4\cdot\frac{\partial CB}{\partial(rA0)} - \left[rA0\cdot S0(T)\cdot L1(E)\cdot\frac{KP0}{(KP0+PS)^2}\cdot PP0\cdot CA0\cdot\frac{\partial PS}{\partial(rA0)}\right] - \\
-\left[mA1max\cdot S1(T)\cdot L1(E)\cdot\frac{KP1}{(KP1+PS)^2}\cdot PP1\cdot CA1\cdot\frac{\partial PS}{\partial(rA0)}\right] - mA2max\cdot S2(T)\cdot L2(E)\cdot \\
\cdot\left(\frac{KN2}{(KN2+NS)^2}\cdot\frac{PS}{KP2+PS}\cdot\frac{\partial NS}{\partial(rA0)} + \frac{NS}{KN2+NS}\cdot\frac{KP2}{(KP2+PS)^2}\cdot\frac{\partial PS}{\partial(rA0)}\right)\cdot PP2\cdot CA2, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial NS}{\partial(rA0)}\right) = RA0\cdot PN0\cdot\frac{\partial CA0}{\partial(rA0)} + RA1\cdot PN1\cdot\frac{\partial CA1}{\partial(rA0)} - (mA2-RA2)\cdot PN2\cdot\frac{\partial CA2}{\partial(rA0)} + \\
+RZ\cdot PN3\cdot\frac{\partial CZ}{\partial(rA0)} + RB\cdot PN4\cdot\frac{\partial CB}{\partial(rA0)} - mA2max\cdot S2(T)\cdot L2(E)\cdot \\
\cdot\left(\frac{KN2}{(KN2+NS)^2}\cdot\frac{PS}{KP2+PS}\cdot\frac{\partial NS}{\partial(rA0)} + \frac{NS}{KN2+NS}\cdot\frac{KP2}{(KP2+PS)^2}\cdot\frac{\partial PS}{\partial(rA0)}\right)\cdot PN2\cdot CA2, \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial POB}{\partial(rA0)}\right) = -\frac{mB}{Y5}\cdot\frac{\partial CB}{\partial(rA0)} + h_0\cdot RAO\cdot\frac{\partial CAO}{\partial(rA0)} + h_1\cdot RA1\cdot\frac{\partial CA1}{\partial(rA0)} + h_2\cdot RA2\cdot\frac{\partial CA2}{\partial(rA0)} + h_3\cdot RZ\cdot \\
\cdot\frac{\partial CZ}{\partial(rA0)} + h_4\cdot RB\cdot\frac{\partial CB}{\partial(rA0)} + mBmax\cdot S4(T)\cdot\left(\frac{KMD}{(KMD+CD)^2}\cdot\frac{\partial CD}{\partial(rA0)} + \frac{KOB}{(KOB+POB)^2}\cdot\frac{\partial POB}{\partial(rA0)}\right)\cdot\frac{CB}{Y5}.
\end{cases}
$$

Начальные условия для системы (6) согласно (4) нулевые. Полученная задача Коши решалась методом Рунге-Кутта четвертого порядка. Проведенные вычислительные эксперименты позволили выявить участки сильного влияния ряда параметров.