УДК 511.7:550.89

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СХЕМЫ БЕРНУЛЛИ И ЕЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ОПИСАНИЯ СВОЙСТВ ГЕОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Иванова А.И.,
Научный руководитель канд. пед. наук Бутакова С.М.
Сибирский федеральный университет

Аппарат раздела математики «Теория вероятностей» наряду с разделом «Математическая статистика» достаточно часто используется для анализа и обработки данных в ходе различных исследований во многих отраслях науки.

Возникновение теории вероятностей как науки относят к средним векам, где первыми попытками математического анализа стали азартные игры (орлянка, кости, рулетка). Большой вклад в развитие теории вероятностей внёс Якоб Бернулли: он доказал закон больших чисел в простейшем случае независимых испытаний. В первой половине XIX века теория вероятностей начинает применяться к анализу ошибок наблюдений. Лаплас и Пуассон доказали первые предельные теоремы.

Мы являемся студентами специальности «Прикладная геология», поэтому более подробно рассмотрим вопрос использования раздела «Теории вероятностей» в геологии.

Процесс математизации, развития и применения математических моделей в геологии имеет более чем 30 – летнюю историю. Характерной особенностью современной геологии является широкое проникновение математических методов в практику повседневной обработки данных. Геология (от греческого «гео» – земля, «логос» – учение) – это наука о составе, строении и закономерностях развитии Земли. Геология в свою очередь подразделяется на отдельные науки, такие как минералогия, петрография, кристаллография, кристаллохимия, палеонтология, структурная геология и т.д. Например, минералогия – это наука о химических соединениях (минералах), а петрография – наука о горных породах. Минералогия и петрографии тесно связаны между собой, так как горная порода это комбинация минералов.

Целью нашей работы является знакомство с материалом раздела «Теория вероятностей» и более подробное изучение тем «Схема независимых испытаний Бернулли», «Приближенные формулы в схеме Бернулли (формулы: Пуассона, Лапласа)», а также применение рассмотренного математического аппарата для описания свойств геологических объектов.

В силу биномиального распределения количества различных минералов в шлифах горных пород будем пользоваться для вычисления вероятности появления данного минерала в шлифе формулой Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m}.$$

Данная формула применима в ситуации, когда производятся n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти событие A, где p – вероятность появления (успеха) события A при отельном испытании, $q = 1 - p$ – вероятность отсутствия (неудачи) этого события. Эта формула используется для расчетов при небольшом числе испытаний, а в случае, когда n – много больше 30 приходилось бы выполнять довольно громоздкие вычисления.

При определении насколько данное месторождение богато минеральными запасами приходится работать с большим числом проб горных пород и в этом случае уместно использовать интегральную теорему Лапласа:

$$P(x_1 \le x \le x_2) \approx 0,5\left(\Phi\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)\right).$$

Здесь $\Phi(t)$ – функция Лапласа, значения которой приведены в специальных таблицах. В задачах удобнее находить вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях не более чем на некоторое число $\varepsilon > 0$ по формуле, которая является следствием приведенной выше теоремы:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx \Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{p \cdot q}}\right).$$

Приведем рассмотренные и решенные нами задачи, иллюстрирующие подходы к использованию схемы Бернулли и ее приближенных формул при решении прикладных задач геологического профиля.

Задача 1. Вероятность встречи минерала кварца в шлифе изучаемой породы равна 0,4. Изготовлено 8 шлифов. Найти наивероятнейшее число шлифов, в которых минерал будет встречен и соответствующую вероятность появления этого числа.

Решение. Введем событие A – минерал обнаружен в шлифе породы. Из условия задачи имеем $n = 8$ - это количество шлифов изучаемой, породы, а $p = 0,4$ - вероятность появления кварца в шлиф изучаемой горной породы, тогда вероятность неудачи найдем по формуле $q = 1 – p = 0,6$.

Рассчитаем вероятность всевозможных исходов независимых испытаний для $n = 8$, по схеме Бернулли, где m принимает значения от 0 до 8.

$$P_8(0) = \frac{8!}{0!(8-0)!} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^{8-0} = 0,017;$$

$$P_8(1) = \frac{8!}{1!(8-1)!} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^{8-1} = 0,09.$$

Остальные вероятности вычисляются аналогично:

$P_8(2) = 0,21$; $P_8(3) = 0,28$;

$P_8(4) = 0,232$; $P_8(5) = 0,124$;

$P_8(6) = 0,041$; $P_8(7) = 0,008$;

$P_8(8) = 0,0007$.

Запишем соответствующий биномиальный закон распределения количества шлифов изучаемой горной породы, в которых минерал кварца может быть встречен, форме таблицы (табл.1).

Таблица 1

$X_i = m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_i = P_n(m)$	0,017	0,09	0,21	0,28	0,232	0,124	0,041	0,008	0,0007

Анализируя данные таблицы 1 можно сделать вывод , что при m = 3, событие A будет наиболее вероятным, а соответствующая вероятность равна 0,28.

Проводя подобные расчеты, выясним, как изменится ситуация в случае других значений вероятности встречи минерала в шлифе изучаемой породы (p = 0,5 и p = 0,8). Полученные результаты вычислений в сравнении представим на графике в форме трех многоугольников биномиального распределения (рис.1).

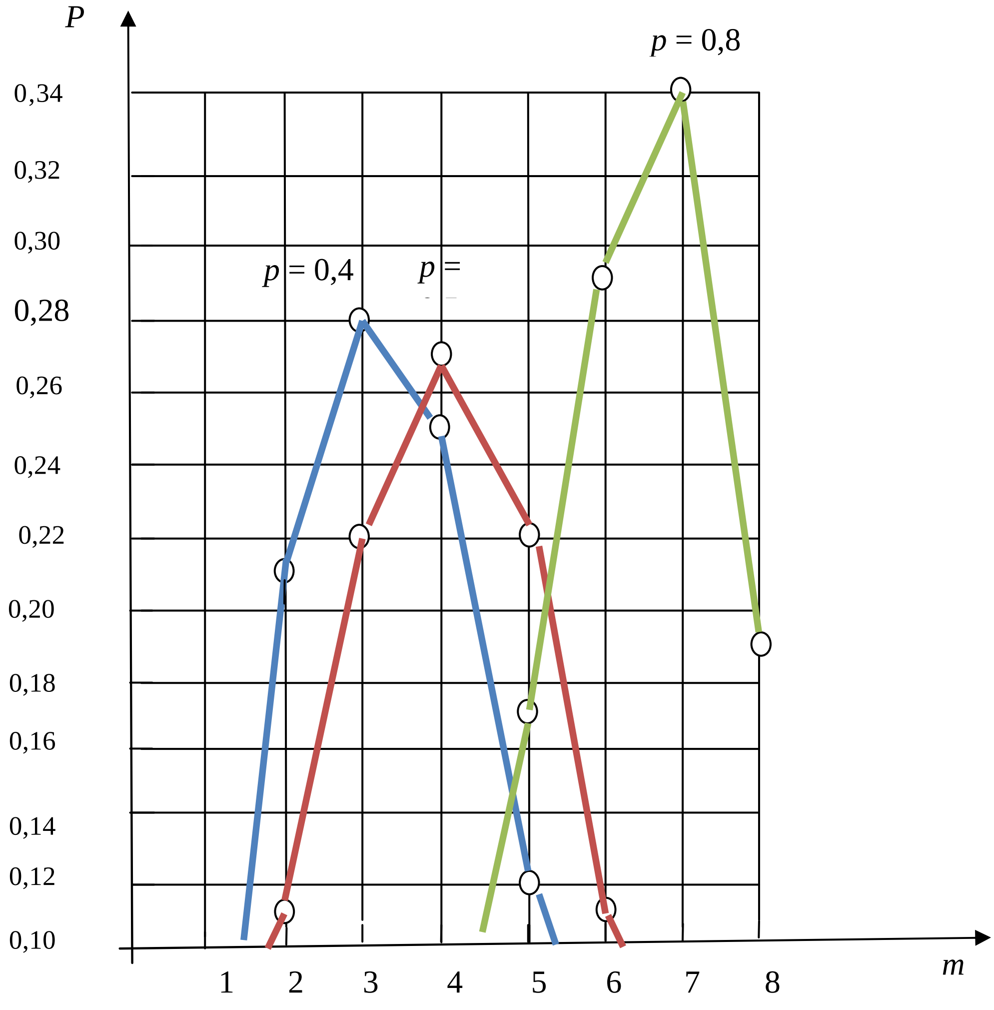

Рис. 1.

Для этих распределений значение вероятности $P_n(m)$ сначала возрастает при увеличении m и достигает наибольшего значения при некотором m_0. При дальнейшем увеличении m вероятность P_n (m) начинает убывать. Биномиальное распределение ассиметрично, за исключением p = 0,5.

Задача 2. Взято 800 проб руды. Вероятность промышленного содержания металла в каждой пробе одинакова и равна 0,3. Считая событие, вероятность наступления которого 0,997, достоверным, найти границы числа проб с промышленным содержанием металла во взятой партии проб.

Решение. Будем использовать следствие из интегральной теоремы Лапласа, так как число испытаний n = 800 достаточно велико, причем p = 0,3, q = 1 – 0,3 = 0,7, P = 0,997:

$$P\left(\left|\frac{m}{800}-0,3\right|\le\varepsilon\right)\approx\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{800}{0,3\cdot0,7}}\right)=0,997.$$

Пусть $\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{800}{0,3\cdot0,7}}=t$, тогда $\Phi(t)$ = 0,997, определим соответствующее значение аргумента по таблице значений функции Лапласа и получим t = 2,97.

$$t=\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{800}{0,3\cdot0,7}}=2,97;$$

$$\varepsilon=\frac{2,97\cdot\sqrt{0,3\cdot0,7}}{\sqrt{800}}=0,0481\approx0,049.$$

Найдем число проб, в которых уровень содержания металла будет промышленным:

$$-0,049\le\frac{m}{800}-0,3\le0,049.$$

Решая неравенство, проводя алгебраические преобразования, получим $201\le m\le280$, то есть из 800 взятых проб содержание металла будет достаточным для промышленной разработки месторождения в 201 – 280 пробах.

Подводя итог, отметим, что, так как мы являемся студентами специальности «Прикладная геология» вуза, то для нас наиболее важен прикладной аспект использования математического аппарата при решении задач, имеющих профессиональную направленность. Приведенные выше решения задач это наглядно проиллюстрировали. В настоящее время математические методы играют большую роль при оценке рудоносности провинций, рудных полей, месторождений.

Список литературы

1. Ворошилов В. Г. Математическое моделирование в геологии: Учебное пособие / В.Г. Ворошилов. – Томск: Изд. ТПУ, 2001. – 124 с.
2. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для вузов / В. Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.
3. Мацкевич И.П. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие / И. П. Мацкевич, Г.П. Свирид, Г.М. Булдык; под общ. ред. Г.П. Свирида. – Мн.: Выш. шк., 1996. – 318 с.
4. Шестаков Ю.Г. Математические методы в геологии: Учебное пособие для студентов геологических специальностей / Ю. Г. Шестаков. – Красноярск: Изд-во Красноярского ун-та, 1988. – 208 с.