УДК 519.85

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ МЕТОДОМ ЭРРОУ-ГУРВИЦА

Шишкина Я. О., Сушкевич В. С.
научный руководитель ст.преподаватель Климович Л.В.
Сибирский федеральный университет

Математическое программирование является одним из разделов науки исследования операций. Содержание математического программирования составляют теория и методы решения задач о нахождении экстремумов функции на множествах, определяемых линейными и нелинейными ограничениями (равенствами и неравенствами). В основном, задачи, решаемые при помощи математического программирования, связаны с явлениями, которые сознательно регулируются (экономические задачи).

Остановимся на методах нелинейного программирования. Возникновение данного раздела связано с тем, что предположение о линейной зависимости различных характеристик рассматриваемого процесса от планируемых параметров при исследовании многих практических задач является весьма приблизительным. Методы нелинейного программирования в зависимости от способа задания шага подразделяются на три основных класса: градиентные методы, безградиентные методы, методы случайного поиска.

Более подробно остановимся на методе штрафных функций и методе Эрроу-Гурвица.

Метод штрафных функций. Рассмотрим задачу определения максимального значения вогнутой функции: $f\,(x_1,x_2,\,...,\,x_n)$ (1)

при условиях: $g_i(x_1,x_2,\ldots,x_n) \le b_i$ $(i=1,m)$; $x_j \ge 0$ $(j=1,n)$, $g_i\,(x_1,x_2,\ldots,x_n)$. (2)

где $g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ - выпуклая функция.

Вместо того чтобы непосредственно решать эту задачу, находят максимальное значение функции $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (3), являющейся суммой целевой функции задачи и некоторой функции $H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, определяемой системой ограничений и называемой *штрафной функцией*.

Её можно построить различными способами. Наиболее часто она имеет вид

$$H\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) g_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \tag{4}$$

где
$$\alpha_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } b_i - g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) \ge 0; \\ \alpha_i, \text{ если} b_i - g_i\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) < 0, \end{cases} \tag{5}$$

а положительные коэффициенты α_i ,называемые *весовыми*, представляют некоторые постоянные числа.

Используя штрафную функцию, последовательно переходят от одной точки к другой до тех пор, пока не получат приемлемое решение. Координаты последующей точки находят по формуле

$$x_j^{(k+1)} = \max\left\{0; x_j^{(k)} + \lambda\left[\frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} a_i \frac{\partial g_i\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_j}\right]\right\},$$

(6)

где λ - шаг вычислений $(0 < \lambda < 1)$.

Если предыдущая точка расположена в области допустимых решений исходной задачи, то второе слагаемое в квадратных скобках формулы равно 0, и переход к последующей точке определяется только градиентом целевой функции. Если же указанная точка не принадлежит области допустимых решений, то за счет данного слагаемого на последующих итерациях достигается возвращение в область допустимых решений.

Метод Эрроу - Гурвица. При нахождении решения задачи нелинейного программирования методом штрафных функций значения α_i выбирают произвольно, что приводит к значительным колебаниям удаленности определяемых точек от области допустимых решений. Этот недостаток устраняется при решении задачи методом Эрроу - Гурвица, согласно которому на очередном шаге числа $a_i^{(k)}$ находят по формуле

$$\alpha_i^{(k)} = \max\{0, \alpha_i^{(k+1)} - \lambda\, g_i(X^{(k)})\} \quad \overline{(i=1,m)} \tag{7}$$

В качестве начальных значений берут произвольные неотрицательные числа.

Задача. Используя метод Эрроу-Гурвица, найти максимальное значение функции $F=-x_1^2-x_2^2$, (8)

при условиях $12-(x_1-6)^2-(x_2-6)^2 \geq 0$; $x_1, x_2 \geq 0$ (9)

Решение: Целевая функция данной задачи представляет собой отрицательно определенную квадратичную форму, и значит вогнута. В то же время область допустимых решений задачи, определяемая ограничениями (9) – выпуклая. Следовательно, поставленная задача является задачей выпуклого программирования. Для нахождения ее решений применим метод штрафных функций и метод Эрроу-Гурвица. Прежде, чем это сделать построим область допустимых решений задачи (рис.1) и линии уровня, определяемые целевой функцией (8). Этими линиями служат окружности с центром в точке (0; 0). Точка касания одной из этих окружностей с областью допустимых решений и является искомой точкой максимального значения целевой функции.

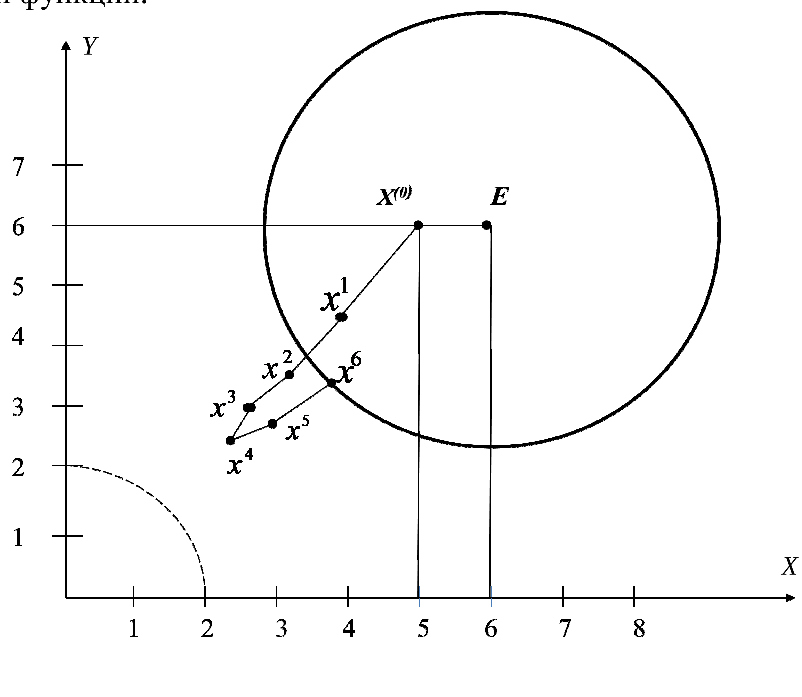

Рис. 1

Предположим, что $X^{(0)}$ =(6;7). Возьмем λ=0,1, обозначим через $g(x_1,x_2)$=12-$(x_1-6)^2-(x_2-6)^2$ и определим частные производные от функций $F(x_1,x_2)$ и $g(x_1,x_2)$ по переменным x_1 и x_2:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = -2x_1; \qquad \frac{\partial g}{\partial x_1} = -2\,x_1 + 12$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = -2x_2; \qquad \frac{\partial g}{\partial x_2} = -2\,x_2 + 12$$

Теперь используя формулу (6), приступаем к построению последовательности точек, одна из которых определит приемлемое решение.

Первая итерация. Так как точка $X^{(0)}$ =(6;7) принадлежит области допустимых решений задачи, то второе слагаемое в квадратных скобках, приведенной выше формулы, будет равно 0. Значит, координаты следующей точки $X^{(1)}$ вычисляем по формулам:

$$x_1^{(1)}=\max\{0;\ x_1^{(0)}+\lambda\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}\}= \max\{0;\ 5+0{,}1\cdot(-2)\cdot 5\}=4;$$

$$x_2^{(1)}=\max\{0;\ x_2^{(0)}+\lambda\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\}= \max\{0;\ 6+0{,}1\cdot(-2)\cdot 6\}=4{,}8.$$

Проверим, принадлежит ли эта точка области допустимых решений задачи. Для этого найдем $g(X^{(1)})$ = 12 – 4 – 1,44 = 6,56. Так как $g(X^{(1)})>0$, то $X^{(1)}$ принадлежит области допустимых решений. В этой точке $F(X^{(1)})$= ***- 39,04***.

Вторая итерация. Находим

$x_1^{(2)}$= max{0; 4+0,1·(-2)·4}=3,2;

$x_2^{(2)}$= max{0; 4,8+0,1·(-2)·4,8}=3,84;

$g(X^{(2)})$=12 – 7,84 – 4,666 = - 0,51 < 0.

При вычислении ***третьей, четвертой и пятой итераций*** полученные значения не принадлежат области допустимых решений.

Шестая итерация. Имеем

$$x_1^{(6)} = \max\{0;\ 3{,}080 + 0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}080 + 1{,}856\cdot((-2)\cdot 3{,}080+12)]\} = 3{,}548;$$

$$x_2^{(6)} = \max\{0;\ 3{,}236 + 0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}236 + 1{,}856\cdot((-2)\cdot 3{,}236+12)]\} = 3{,}615;$$

$g(X^{(6)})$=0,299 > 0; $F(X^{(6)})$ = ***-25,657.***

Точка принадлежит области допустимых решений и находится достаточно близко к ее границе, поэтому решение $x_1^* = 3{,}548$; $x_2^* = 3{,}615$ можно считать приемлемым оптимальным решением задачи $F(X^{(6)})$ = ***-25,657.***

На основании приведенного решения, можно сделать вывод о том, что данные методы поиска приближенных значений позволяют успешно решать экономические задачи, так как отклонения результата являются незначительными.

Список используемой литературы:

1. Акулич И.Л., Математическое программирование в примерах и задачах [Текст]/ И.Л.Акулич.- М.:Высш. шк., 1986.

2. Бодров В.И., Математические методы принятия решений: учеб. пособие./ В.И.Бодров, Т.Я.Лазарева, Ю.Ф. Мартемьянов.- Тамбов: Изд-во Тамб. гос. тех. ун-та, 2004.

3. Вентцель Е.С., Исследование операций/ Е.С.Вентцель.- М.:Советское радио, 1972.