УДК 532.529

ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ ПО ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Гильманов С. А.,

научный руководитель д-р физ.-мат. наук, акад. АН РБ Шагапов В. Ш.

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

Изучение движения жидкого потока по рельефной поверхности является актуальной задачей прикладной математики в области гидромеханики. Феноменологические модели, которые используют усредненные параметры, достаточно корректно описывают поведение потока. В работе получен лагранжев профиль начального состояния потока, рассмотрено поведение системы в зависимости от параметров.

Анализ движения потоков по поверхности, описываемой обобщенной формулой вида $y(x)=ax^2$ позволяет получить решения для произвольного гладкого профиля, составляя этот профиль из элементов парабол без нарушения ее гладкости.

Математическая модель для описания движения потока в односкоростном приближении принята аналогично теории мелкой воды. Тогда система уравнений неразрывности и баланса локального импульса при отсутствии источников и стоков может быть записана в следующем виде [1,2]:

$$\frac{d}{dt}(h-y)+(h-y)\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=0\,, \qquad (1)$$

$$\frac{d\upsilon}{dt}=-g\frac{\partial h}{\partial x}-f(\upsilon)\,. \qquad (2)$$

Схема потока представлена на рис.1.

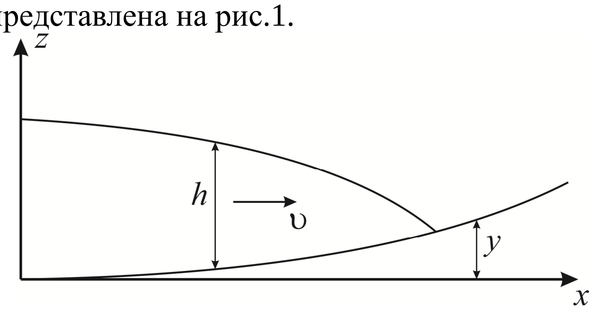

Рис.1. Схема потока

Здесь h,υ – высота и средняя по высоте горизонтальная скорость потока жидкости в момент времени t для координаты x, $g=9.8$ *м/с*^{2} – ускорение свободного падения. Для второго слагаемого в правой части (2) примем линейную зависимость от скорости для сил сопротивления в виде $f(\upsilon)=\alpha\upsilon$. Параметр α, принимаеый в модели, может быть определен при помощи эмпирических наблюдений. Решение системы (1)-(2) ищем в лагранжевых координатах в следующем виде [3]:

$$x=X(t)x_0,\, h=y+\frac{h_0(x_0)}{X(t)},\ \upsilon=\dot{X}(t)x_0 \qquad (3)$$

Подстановка (3) в (1)-(2) дает тождественное равенство в (1), а второе уравнение принимает следующий вид:

$$\ddot{X}(t)x_0=-g\left(2aX(t)x_0+\frac{1}{X(t)^2}\frac{dh_0(x_0)}{dx_0}\right)-\alpha\dot{X}(t)x_0 \qquad (4)$$

После преобразования это уравнение принимает вид:

$$\left(\ddot{X}(t)+\alpha\dot{X}(t)+2agX(t)\right)X(t)^2=\frac{-g}{x_0}\frac{dh_0(x_0)}{dx_0}=gN\,, \qquad (5)$$

здесь N – параметр системы, не зависящий от x_0 и t. Профиль жидкости в начальый момент имеет вид:

$$h_0(x_0)=C-\frac{N}{2}x_0^2 \qquad (6)$$

В зависимости от параметра N профиль разлива может быть представлен или как в случае инерционного течения (край выше начала ($N<0$)), либо как в случае стационарного течения. (в начале координат высота потока выше, чем на переднем фронте ($N>0$)). Временное уравнение дает аналитическое решение тольк при $N=0$, когда в начальный момент времени толщина жидкости одинакова для всех x_0:

$$X(t)=C_1\exp\left(\left(-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-4ag}\right)t\right)+C_2\exp\left(\left(-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha^2-4ag}\right)t\right) \qquad (7)$$

Очевидно, что это уравнение затухающих колебаний, широко известное и литературе. Далее рассмотрим случай N>0. Уточним начальное условие. В начальный момент времени $x=x_0$, тогда $X(0)=1$. Второе условие примем как $\dot{X}(0)=0$, т.е. жикость в начальный момент покоится. Тогда зависимость $X(t)$ для параметров $\alpha=1.0, a=0.01$ может быть решена численно.

На Рис.2. представлены зависимости $X(t)$ от времени, числа на кривых отвечают значениям параметра N.

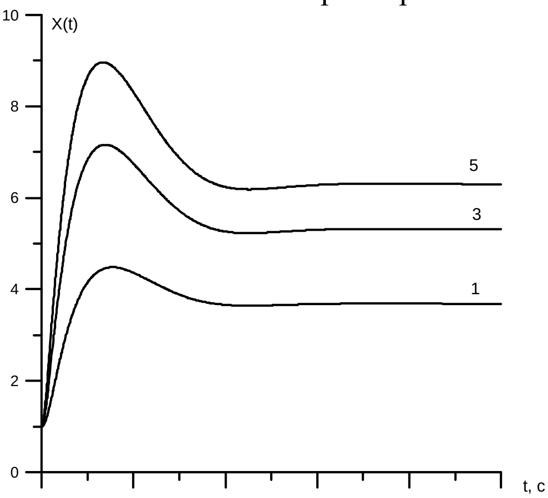

Рис.2. Зависимости X от времени для различных значений N, $\alpha=1.0, a=0.01$.

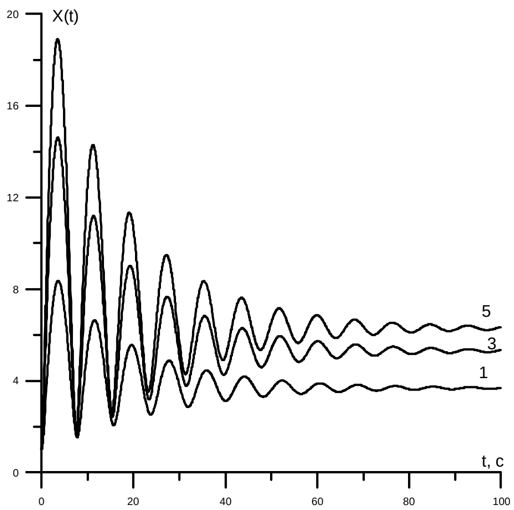

Рис.3. Зависимости X от времени для различных значений N, $\alpha=0{,}1, a=0.01$

Анализ кривых показывает, что колебания достаточно быстро затихают. Причем установившиеся значения X увеличиваются с ростом параметра N. Эйлеровы координаты для фиксированных значений лагранжевых координат будут иметь вид, аналогичный указаным на Рис.2. Уменьшение параметра α на порядок приведет к увеличению числа колебаний перед установлением состояния равновесия. На Рис.3. приведены зависимость X от времени для этого случая. Уменьшение параметра, отвечающего за затухание на порядок приводит к росту времени, необходимого для установления стационарной конфигурации потока. Из графиков также заметно, что увеличение параметра N влияет только на амплитуду колебаний, а частота остается постоянной. При устремлении α к 0 уравнение асимптотически стремится к решению:

$$X(t) = \frac{N}{a} - \frac{N-a}{a}\cos\left(\sqrt{ag}\,t\right) \tag{8}$$

Анализ последнего выражения показывает, что при отсутствии сопротивления волна будет совершать колебания относительно равновесной координаты *N/a* с амплитудой
(N-a)/a.

Заключение. В работе представлена математическая модель растекания жидкости по параболической поверхности. Получен аналитический профиль высоты в начальный момент времени. Получены некоторые точные и численные решения, позволяющие проанализировать поведение накатывающегося потока. Показано, что в случае отсутствия сопротивления волны будут колебаться около положения равновесия.

Список использованной литературы.

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Издание 5-е. – Т. VI. Гидродинамика. – М.: Физматлит, 2006. – 736 с.
2. Шагапов В.Ш, Гильманов С.А. Растекание жидкости по поверхности, сопровождаемое впитыванием в грунт // ПМТФ.2010. Т.51.№5. С.88-94.
3. Петров А.Г. Аналитическая гидродинамика. М.: Физматлит, 2009. 518с.