

МОДЕЛИРОВАНИЕ КРИВОЛИНЕЙНЫХ СТРУКТУР АРМИРОВАНИЯ В БИПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Панкрац Д.А.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доц. Федорова Н.А.

Сибирский Федеральный Университет

Круглые пластины, круговые и эксцентрические кольца широко применяются в качестве важнейших элементов конструкций ответственного назначения в различных отраслях промышленности. Использование современных композиционных материалов и возможность управления их внутренней структурой открывает широкие перспективы по улучшению и оптимизации создаваемых конструкций.

Волокнистое армирование позволяет использовать новые принципы проектирования и изготовления изделий, основанные на том, что материал и изделие создаются одновременно в рамках одного и того же технологического процесса. В результате получается материал с новыми свойствами. Изучить и предсказать эти свойства можно с помощью математического моделирования на основе структурного подхода [1].

Структурный подход характеризуется тем, что коэффициенты матрицы упругости являются функционалами от параметров исходного волокнистого композита: углов армирования, интенсивности армирования, размеров эксцентриситета кольца.

В работе [2] получена разрешающая система дифференциальных уравнений относительно компонент тензора деформации $\varepsilon_\xi, \varepsilon_\eta, \varepsilon_{\xi\eta}$:

$$\begin{aligned}
 & C_1 \frac{\partial^2 \varepsilon_\eta}{\partial \xi^2} + C_2 \frac{\partial^2 \varepsilon_\xi}{\partial \eta^2} + C_3 \frac{\partial^2 \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} + C_4 \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \xi} + C_5 \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \eta} + C_6 \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \xi} + C_7 \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \eta} + \\
 & + C_8 \frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi} + C_9 \frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \eta} + C_{10} \varepsilon_\xi + C_{11} \varepsilon_\eta + C_{12} \varepsilon_{\xi\eta} = 0, \\
 & a_{11} \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \xi} + a_{12} \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \eta} + a_{13} \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \xi} + a_{14} \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \eta} + a_{15} \frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi} + a_{16} \frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \\
 & + F_1 (H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,\xi}, \varphi_{1,\eta}, \varphi_{2,\xi}, \varphi_{2,\eta}) = 0, \\
 & a_{21} \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \xi} + a_{22} \frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \eta} + a_{23} \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \xi} + a_{24} \frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \eta} + a_{25} \frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi} + a_{26} \frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \eta} + \\
 & + F_2 (H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,\xi}, \varphi_{1,\eta}, \varphi_{2,\xi}, \varphi_{2,\eta}) = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

где C_i – зависящие от коэффициентов Ламе H_1, H_2 приведены в [3]; a_{ij} – коэффициенты, зависящие от коэффициентов Ламе, углов армирования φ_1, φ_2 , интенсивностей армирования ω_1, ω_2 , и механических свойств материала получены в [3,4].

Исследован детерминантным методом тип системы (1). Получено, что данная система является системой эллиптического типа и при задании краевых условий она имеет единственное решение.

Выбран способ армирования по криволинейным траекториям биполярной системы координат. На рис.1 представлен схематический внешний вид плоской эксцентрической пластинки, армированной двумя семействами волокон по координатным линиям $\xi = \xi^0 = Const$, $\eta = \eta^0 = Const$.

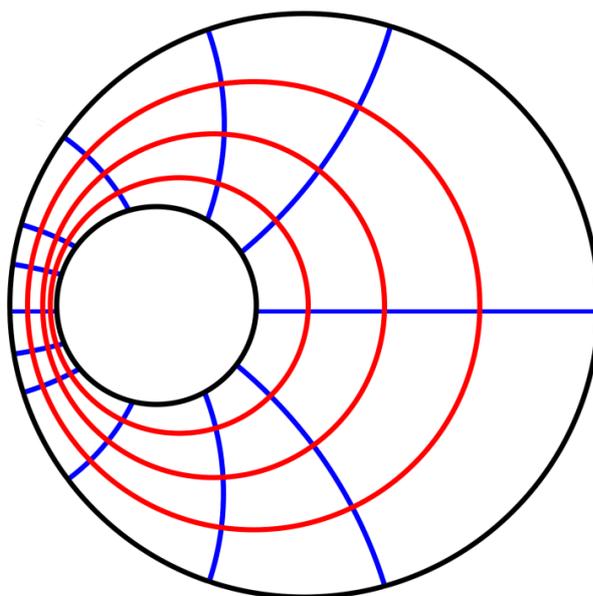


Рис. 1. Армированное эксцентрическое кольцо

Для данного способа армирования получены решения для интенсивностей армирования двумя семействами волокон:

$$\omega_1 = \frac{H(\xi^0, \eta) \omega_1^0(\eta)}{H}, \omega_2 = \frac{H(\xi, \eta^0) \omega_2^0(\xi)}{H}, \quad (2)$$

где $\omega_1^0(\eta), \omega_2^0(\xi)$ - известные функции, заданные на внутреннем контуре кольца, $H(\xi, \eta)$ - коэффициенты Ламе, в биполярной системе координат имеющие вид

$$H_1 = H_2 = H = \frac{a}{\operatorname{ch} \xi + \cos \eta} \quad (3)$$

Для решения разрешающей системы дифференциальных уравнений был выбран метод конечных элементов (МКЭ). МКЭ в форме Галеркина характерен тем, что для него не требуется симметричность и положительная определенность дифференциального оператора поставленной плоской неоднородной задачи упругости. Кроме того, в работе [5] доказано, что для эллиптических систем уравнений с краевыми условиями на гладкой границе МКЭ всегда сходится и имеет решение.

В качестве конечного элемента выберем криволинейный прямоугольник (рис. 2). Здесь a_1, a_2, b_1, b_2 - константы. Аппроксимацию решения проводим кусочно-линейными функциями.

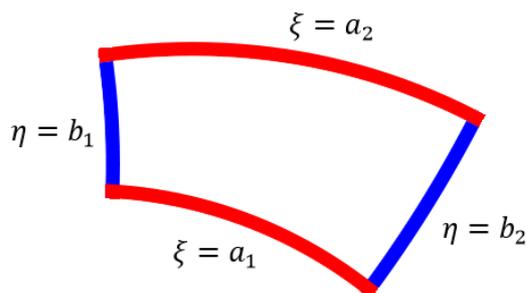


Рис.2. Конечный элемент.

Полученная система алгебраических уравнений имеет трехдиагональную матрицу и в силу особенностей построения имеет строгое диагональное преобладание этой матрицы. Поэтому ее можно решить любым прямым методом, например, методом прогонки.

Таким образом, для армированного эксцентрического кольца реализован МКЭ, учитывающий особенности армированной среды. В настоящее время по реализованной схеме МКЭ проводятся тестовые расчеты.

Библиографические ссылки

1. Немировский Ю. В., Федорова Н. А. Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов. Красноярск: СФУ, 2010. 136 с.
2. Федорова Н.А., Панкрац Д.А. Криволинейные структуры армирования плоских конструкций в биполярной системе координат. // Материалы XVII Международной конференции "Решетневские чтения" 2013. Ч.2, С. 116-118.
3. Yu.V. Nemirovsky. On the elastic-plastic behaviour of the reinforced layer . Int. J.Mech.Sci., 1970. No 12 pp. 898 – 903.
4. Федорова Н.А. Моделирование деформирования плоских конструкций со сложными криволинейными структурами армирования // Вестник Сиб.гос.аэрокосмич.ун-та. Вып. 3(36). Красноярск, 2011. С. 92–98.
5. Лаевский Ю.М. Метод конечных элементов (основы теории, задачи). Новосибирск, НГУ, 1999 г. 166 с.