

«ИЗУЧЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ КАК ФРАКТАЛЬНЫЙ ОБЪЕКТ».

Рукоуев Д.В.

научный руководитель: Меньших Л.Л.

Муниципальное бюджетное образовательное учреждение «Лицей № 174»

Многие природные системы настолько сложны, что использование только знакомых объектов классической геометрии для их моделирования представляется невозможным. Нередко то, что мы наблюдаем в природе, интригует нас бесконечным повторением одного и того же узора, увеличенного или уменьшенного во сколько угодно раз. Данные объекты нам позволяет описать *фрактальная геометрия*.

Фрактальная геометрия – новое направление в математике, совершившее в научной парадигме переворот, сравнимый по значимости с теорией относительности и квантовой механикой. Объекты фрактальной геометрии по своему внешнему виду резко отличаются от привычных нам «правильных» геометрических фигур.

Вся потрясающая сложность и красота фракталов вырастает из нескольких довольно простых идей. Однако школьное преподавание в силу своей инертности доберется до них еще не скоро. В этом и заключается *актуальность* данной работы.

Одним из простейших объектов фрактальной геометрии является треугольник Паскаля. **Объектом исследования** работы являются свойства треугольника Паскаля. **Предмет исследования** - изучение свойств треугольника Паскаля методами фрактальной геометрии.

Цель работы: получение новых свойств треугольника Паскаля.

Задачи:

1. Ознакомиться с понятием «фрактал», его свойствами.
2. Исследовать способы описания геометрических фракталов.
3. Изучить свойства треугольника Паскаля, как математического объекта.
4. Изучить свойства треугольника Паскаля, как фрактального объекта.
5. Найти применение фракталам и треугольника Паскаля.

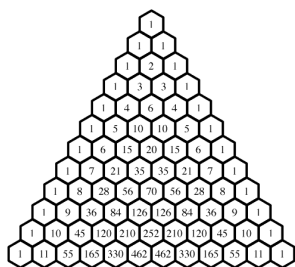
Треугольник Паскаля является, пожалуй, одной из наиболее известных и изящных числовых схем во всей математике. Без Паскаля, французский математик и философ, посвятил ей специальный "Трактат об арифметическом треугольнике". Впрочем, эта треугольная таблица была известна задолго до 1665 года - даты выхода в свет трактата. Так, в 1529 году треугольник Паскаля был воспроизведен на титульном листе учебника арифметики, написанного астрономом Петром Апианом. Изображен треугольник и на иллюстрации книги "Яшмовое зеркало четырех элементов" китайского математика Чжу Шицзе, выпущенной в 1303 году. Омар Хайям, философ, поэт, математик знал о существовании треугольника в 1110 году, в свою очередь заимствовав его из более ранних китайских или индийских источников.

Термин фрактал был введен Бенуа Мандельбротом более 30 лет назад, но до сих пор однозначного определения не существует. Гораздо легче описать фракталы, чем определить их. Ключевое свойство, характеризующее фракталы – *самоподобие*. Поэтому фрактал можно определить как геометрическую фигуру, в которой один и тот же фрагмент повторяется при каждом уменьшении масштаба.

Построение треугольника Паскаля.

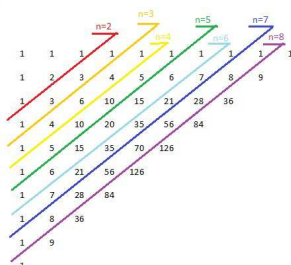
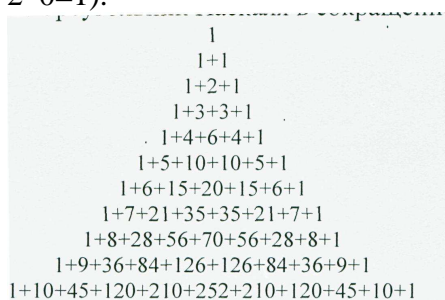
Треугольник Паскаля - это просто бесконечная числовая таблица «треугольной формы», в которой на вершине и по боковым сторонам стоят единицы, каждое из

остальных чисел равно сумме двух чисел, стоящих над ним слева и справа в предшествующей строке.

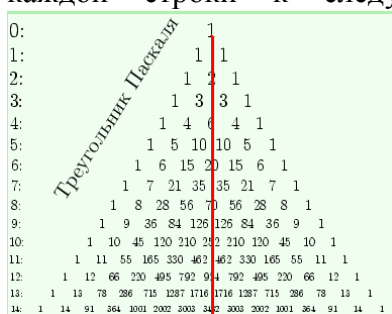


Свойства треугольника Паскаля.

1. Сумма чисел n-й строки Паскаля равна 2^n (потому что при переходе от каждой строки к следующей сумма членов удваивается, а для нулевой строки она равна $2 \cdot 0 = 1$).



2. Все строки треугольника Паскаля симметричны (потому что при переходе от каждой строки к следующей свойство симметричности сохраняется).



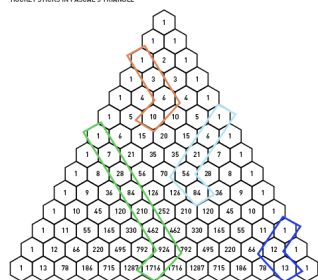
3. Каждый член строки с номером n треугольника Паскаля тогда и только тогда делится на t, когда t- простое число, а n - степень этого простого числа.

2.3. Нахождение элемента треугольника

Каждое число в треугольнике Паскаля равно C_n^k , где n - номер строки, k - номер элемента в строке

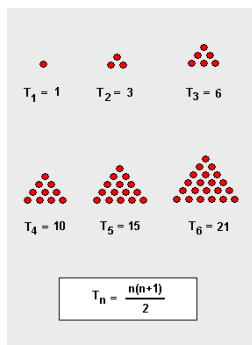
Докажем, что оно равно сумме чисел предыдущей диагонали, начиная со стороны треугольника и кончая числом, стоящим над данным.

HOCKEY STICKS IN PASCAL'S TRIANGLE



2.4. Числа входящие в треугольник Паскаля

Треугольные числа. Вдоль диагоналей, параллельных сторонам треугольника, выстроены треугольные, тетраэдрические, другие числа. Треугольные числа указывают количество шаров или других предметов, уложенных в виде треугольника (эти числа образуют следующую последовательность: 1,3,6,10,15,21,..., в которой 1- первое треугольное число, 3- второе треугольное число, 6-третье и т.д. до m-го, которое показывает, сколько членов треугольника Паскаля содержится в первых m его строках - от нулевой до (m-1)-й.



n-число шаров по диагонали
от вершины до конца треугольника

Тетраэдрические числа. Члены последовательности 1,4, 10, 20, 36, 56,... называются пирамидальными, или, более точно, тетраэдрическими числами: 1- первое тетраэдрическое число, 4- второе, 10- третье и т.д. до m-го. Эти числа показывают, сколько шаров может быть уложено в виде треугольной пирамиды (тетраэдра). Формула для тетраэдрического числа:

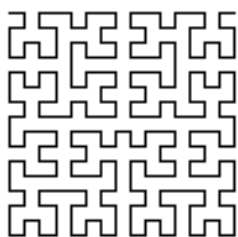
$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Классификации фракталов

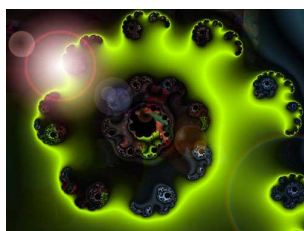
Геометрические: Именно с них и начиналась история фракталов. Этот тип фракталов получается путем простых геометрических построений (рис.1).

Алгебраические: это самая крупная группа фракталов. Получают их с помощью нелинейных процессов в n-мерных пространствах (рис.2).

Стохастические: Фракталы, при построении которых случайным образом изменяются какие-либо параметры (рис.3).



(рис.1)



(рис.2)



(рис.3).

Свойства фракталов:

Фракталы обладают двумя основными свойствами:

- 1) *самоподобие*, т.е. фракталы на малых масштабах выглядят в среднем так же, как и на больших;
- 2) *дробную размерность* (называемую размерностью Хаусдорфа).

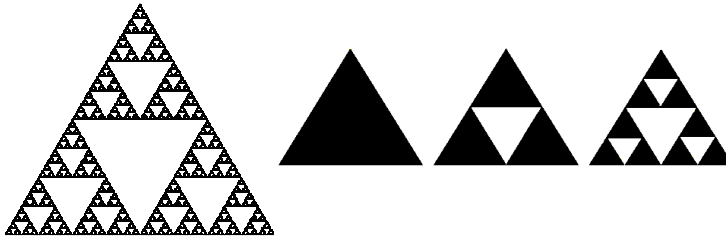
Укажем свойства фрактальных множеств F:– F имеет тонкую структуру, то есть содержит произвольно малые масштабы;
– F слишком нерегулярное, чтобы быть описанным на традиционном

геометрическом

языке;

– F имеет некоторую форму самоподобия;– в большинстве случаев F определяется очень просто, например, рекурсивно.

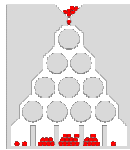
Треугольник Серпинского. В 1915 году польский математик Вацлав Серпинский придумал занимательный объект, известный как *решето Серпинского*. Этот треугольник один из самых ранних известных примеров фракталов.



Существует несколько способов построения этого фрактала. Один из них представляет следующий процесс. Берется сплошной равносторонний треугольник, на первом шаге из центра удаляется перевернутый треугольник. На втором шаге удаляется три перевернутых треугольника из трех оставшихся **треугольников**.

Применение фракталов и треугольника Паскаля:

1. Применяется в теории вероятности. При счете распределения вещества в треугольнике Паскаля.



2. В физике фракталы естественным образом возникают при моделировании нелинейных процессов, таких, как турбулентное течение жидкости, сложные процессы диффузии-адсорбции, пламя, облака и т. п.
3. В информатике существуют алгоритмы сжатия изображения с помощью фракталов. Они основаны на идее о том, что вместо самого изображения можно хранить сжимающее отображение, для которого это изображение (или некоторое близкое к нему) является неподвижной точкой. Один из вариантов данного алгоритма был использован фирмой Microsoft при издании своей энциклопедии, но большого распространения эти алгоритмы не получили.
4. Фракталы широко применяются в компьютерной графике для построения изображений природных объектов, таких как деревья, кусты, горные ландшафты, поверхности морей и так далее. Существует множество программ, служащих для генерации фрактальных изображений.
5. Если четные числа заменить на 0, а нечетные на 1, то получится треугольник Серпинского из 0 и 1. Если построить треугольник Паскаля в двоичной системе, то получится точно такое же изображение.(рис. 1)
6. В литературе фракталы были использованы в произведении А.С. Пушкина "Евгений Онегин" . Фрактал - фигура состоящая из самоподобных фрагментов, а "Евгений Онегин", строится по принципу фракталов, из фрагментов - строф:**ababccddeffegg**. Большинство людей, считают, что фракталы, это лишь красивые картинки, которые услаждают глаз. К счастью, это не так, фракталы применяются во многих областях деятельности человека. Это модное понятие взрывообразно шагает по планете, завораживая своей красотой и таинственностью, проявляясь в самых неожиданных областях: метеорологии, философии, географии, биологии, механике и даже литературе.