

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РАЗЛИВА ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ НА ОСНОВЕ ГИПОТЕЗЫ МЕЛКОЙ ВОДЫ

Семенова Т.Д.,

научный руководитель канд. физ-мат. наук Гильманов С.А.

*Стерлитамакский филиал Башкирского Государственного Университета*

В природе и промышленности широко распространены процессы разлива жидкостей по твердой поверхности. Достаточно часто встречаются потоки, состоящие из двух и более несмешивающихся жидкостей. Натурное изучение разлива нескольких жидкостей затруднено в связи со сложностью фиксации результатов наблюдений. Поэтому математическое моделирование движения несмешивающихся жидкостей на основе двухслойной модели является актуальным.

Рассмотрим поведение потока, состоящего из двух слоев жидкости, отличающихся плотностью и вязкостью. Пусть более легкая жидкость находится над более плотной жидкостью. Для упрощения математического описания положим, что жидкости несжимаемы и изотермичны. Кроме того, примем, что поток является плоско-одномерным, а поверхность растекания – горизонтальной. Вид такого потока представлен на рис.1.

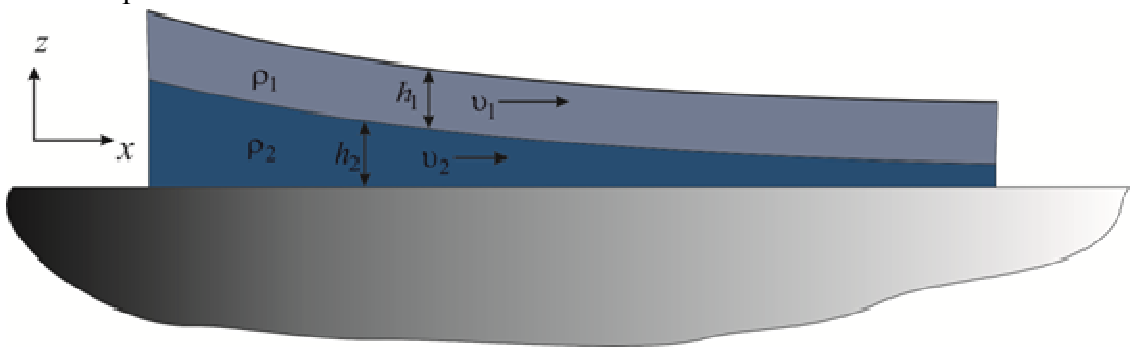


Рис.1. Схема двухслойной жидкости.

Запишем уравнения неразрывности и уравнение баланса импульса для каждого слоя жидкости в канале в виде[1]:

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_1 v_1) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h_2 v_2) = -I;$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_1 h_1} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho_1 g h_1^2 + \rho_2 g h_1 h_2 \right) - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 (v_2 - v_1); \quad (2)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial v_2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2 h_2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} \rho_2 (h_2 - h_1)^2 \right) + \alpha_2 (v_1 - v_2);$$

Рассмотрим стационарное и безинерционное течение. Зависимость от времени в дальнейшем будет учтена неявно при помощи граничных и начальных условий. Пренебрегая интенсивностью испарения, (1) и (2) запишем в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(h_1 v_1) &= 0; \\ \frac{d}{dx}(h_2 v_2) &= 0; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho_1 h_1} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \rho_1 g h_1^2 + \rho_2 g h_1 h_2 \right) - \alpha_1 v_1 - \alpha_2 (v_2 - v_1) &= 0; \\ -\frac{1}{\rho_2 h_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{2} \rho_2 (h_2 - h_1)^2 \right) + \alpha_2 (v_1 - v_2) &= 0; \end{aligned} \quad (4)$$

Выразив из (4) скорости  $v_1, v_2$  и подставив их в (3), получим систему двух нелинейных ОДУ:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{g}{2\alpha_1} \frac{dh_1}{dx} - \left( \frac{g\rho_2}{\alpha_1\rho_1} + \frac{g}{2\alpha_1} \right) \frac{dh_2}{dx} \right) &= 0; \\ \frac{d}{dx} \left( \left( \frac{g}{2\alpha_1} + \frac{g}{\alpha_2} \right) \frac{dh_1}{dx} - \left( \frac{g\rho_2}{\alpha_1\rho_1} + \frac{g}{2\alpha_1} + \frac{g}{2\alpha_2} \right) \frac{dh_2}{dx} \right) &= 0; \end{aligned} \quad (5)$$

В случае плоской симметрии условия в начале координат и на переднем фронте потоков зададим в виде:

$$\begin{aligned} h_1 v_1|_{x=0} = Q_1; h_2 v_2|_{x=0} = Q_2; h_1(l_1(t)) = 0; h_2(l_2(t)) = 0; \\ \frac{d}{dx} \int_0^{l_1(t)} h_1(x) dx = Q_1; \frac{d}{dx} \int_0^{l_2(t)} h_2(x) dx = Q_2; \end{aligned} \quad (6)$$

С учетом этих условий, после однократного интегрирования уравнения (5) могут быть представлены в виде:

$$\begin{cases} \frac{dh_1}{dx} = \frac{A_1}{h_1} + \frac{B_1}{h_2}; \\ \frac{dh_2}{dx} = \frac{A_2}{h_1} + \frac{B_2}{h_2}; \end{cases} \quad (7)$$

где  $A_1, B_1, A_2, B_2$  – однозначные функции от параметров системы (плотности жидкостей, коэффициенты сопротивлений, ускорение свободного падения). Данная система уравнений в общем виде не имеет аналитического решения. Однако численная реализация этой системы, например, методом Рунге-Кутты, позволяет пронаблюдать профили слоев жидкости в стационарном состоянии. На рис.2. приведены профили высот жидкостей при различных начальных условиях ( $\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_2 = 800 \text{ кг/м}^3$ ,  $\alpha_1 = 10 \text{ 1/с}$ ,  $\alpha_2 = 5 \text{ 1/с}$ ). На Рис 2а заданы высоты в точке  $x_0=0.7 \text{ м}$   $h_1(x_0)=h_2(x_0)=0.02 \text{ м}$ , на Рис. 2б  $h_1(x_0)=10h_2(x_0)=0.2 \text{ м}$ , на Рис. 2в  $h_1(x_0)=2h_2(x_0)=0.02 \text{ м}$ , на рис. 2г  $h_1(x_0)=0.5h_2(x_0)=0.01 \text{ м}$ .

Анализ кривых показывает, что в зависимости от начальных условий могут быть реализованы различные типы совместного движения тяжелой и более легкой жидкостей.

В работе представлена феноменологическая математическая модель, позволяющая описывать разливы двух несмешивающихся жидкостей. Получены профили высот для ряда начальных условий.

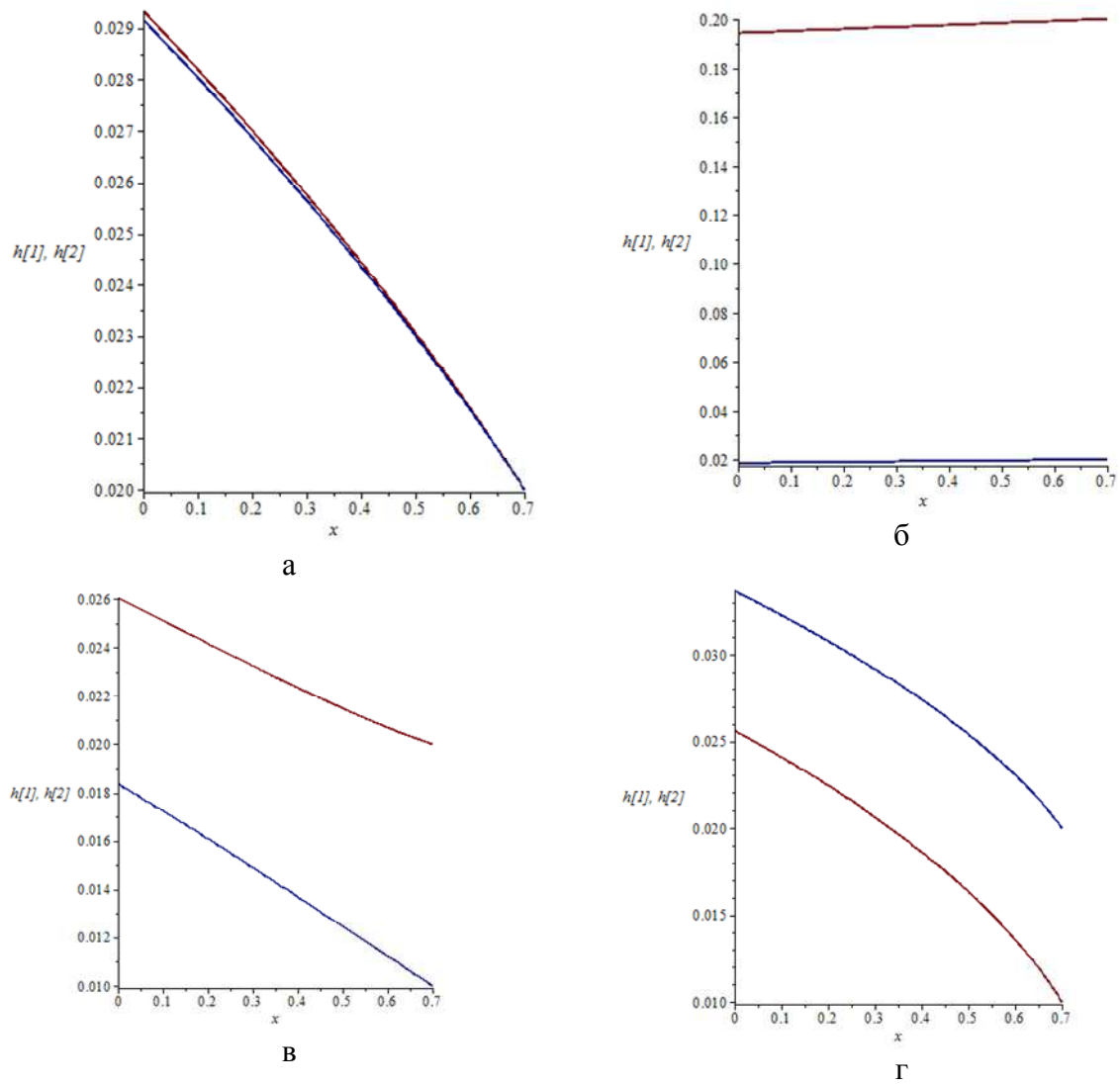


Рис.2. Профили слоев двуслойной жидкости.

Список использованной литературы

1. Шагапов В.Ш., Гильманов С.А. Растекание жидкости по поверхности, сопровождаемое впитыванием в грунт // ПМТФ.2010. – Т.51. №5. – С.88-94.