

## АЛГОРИТМ ТРЁХМЕРНОГО БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ПО АНАЛОГУ АЛГОРИТМА КУЛИ-ТЬЮКИ

Тутатчиков В. С., Липатов В. И.

*ФГАОУ ВПО Сибирский федеральный университет институт космических  
и информационных технологий, Красноярск*

В работе рассмотрены алгоритмы вычисления дискретного преобразования Фурье (ДПФ), значительно отличающиеся по своей вычислительной сложности: вычисление трехмерного ДПФ при помощи комбинации одномерного быстрого преобразования Фурье (БПФ), а также трехмерное БПФ по аналогу с алгоритмом Кули-Тьюки [1], произведено сравнение с пакетом Matlab [2].

### Описание алгоритма

Рассмотрим сигнал  $f$ , который является трехмерным периодическим сигналом с периодом  $2^s$  по трем координатам. Отсчеты задаются, как  $f(x, y, z)$ , где  $x, y, z = 0:2^s$ . Дискретное преобразование Фурье для данного сигнала  $f$  задаётся формулой:

$$F(a, b, c) = \sum_{x=0}^{2^s-1} \sum_{y=0}^{2^s-1} \sum_{z=0}^{2^s-1} f(x, y, z) \cdot e^{-\frac{2\pi i(ax+by+cz)}{2^s}} \quad (1)$$

Трехмерное ДПФ Фурье  $F$  можно вычислить при помощи одномерных ДПФ в следующем виде:

$$F(a, b, c) = \sum_{x=0}^{2^s-1} \left[ \sum_{y=0}^{2^s-1} \left[ \sum_{z=0}^{2^s-1} f(x, y, z) \cdot e^{-\frac{2\pi i ax}{2^s}} \right] \cdot e^{-\frac{2\pi i by}{2^s}} \right] \cdot e^{-\frac{2\pi i cz}{2^s}} \quad (2)$$

Суммы в квадратных скобках представляют собой одномерные вычисления ДПФ по трём координатам сигнала  $f$ . Преобразуем данную формулу разбиением трех координат на четную и нечетную компоненты:

$$F(a, b, c) = g(2x_1, 2y_1, 2z_1) + e^{-\frac{2\pi i a}{2^s}} g(2x_1 + 1, 2y_1, 2z_1) + e^{-\frac{2\pi i b}{2^s}} g(2x_1, 2y_1 + 1, 2z_1) + \\ e^{-\frac{2\pi i c}{2^s}} g(2x_1, 2y_1, 2z_1 + 1) + e^{-\frac{2\pi i(a+b)}{2^s}} g(2x_1 + 1, 2y_1 + 1, 2z_1) + e^{-\frac{2\pi i(b+c)}{2^s}} g(2x_1, 2y_1 + 1, 2z_1 + 1) + \\ e^{-\frac{2\pi i(a+c)}{2^s}} g(2x_1 + 1, 2y_1, 2z_1 + 1) + e^{-\frac{2\pi i(a+b+c)}{2^s}} g(2x_1 + 1, 2y_1 + 1, 2z_1 + 1) \quad (3)$$

где  $g(x, y, z) = \sum_{x=0}^{2^s} \sum_{y=0}^{2^s} \sum_{z=0}^{2^s} f(x, y, z) \cdot e^{-\frac{2\pi i(ax_2+by_2+cz_2)}{2^s}}$  - трехмерное ДПФ сигнала чётных и нечетных компонент трёх координат прореженного сигнала,  $x_2 = x\%2$ ,  $y_2 = y\%2$ ,  $z_2 = z\%2$ ,  $x_2, y_2, z_2$  - результат целочисленного деления на 2.

Число комплексных умножений алгоритма трёхмерного БПФ по аналогу Кули-Тьюки  $7/8 N^3 \log_2 N$  комплексных сложений  $3N^3 \log_2 N$ , в отличие от метода вычисления при помощи комбинации одномерных БПФ:  $N^3 \log_2 N$  комплексных умножений и  $N^3 \log_2 N$  комплексных сложений [1].

Для тестирования алгоритма была написана программа на языке C++, реализующая два алгоритма: трехмерное БПФ при помощи комбинаций одномерных БПФ и БПФ по аналогу Кули-Тьюки. Тестирование проводилось на компьютере с процессором Intel Core i5 2400 Gh, 4 Гб оперативной памяти, операционная система Windows 7. Скорость работы двух алгоритмов засекалась в секундах. Вычисление трехмерного БПФ в пакете Matlab производилось при помощи функции fftn. Результаты работы программы представлены в таблице.

Размер	БПФ при помощи комбинации 1D БПФ	БПФ по аналогу Кули-Тьюки	БПФ Matlab fftn
16*16*16	0,004	0.002	0.003
32*32*32	0.016	0.011	0.017
64*64*64	0.045	0.019	0.120
128*128*128	0.298	0.134	0.273
256*256*256	2.850	1.225	-
512*512*512	29.840	10.658	-

**Вывод:** алгоритм трехмерного быстрого преобразования Фурье по аналогу алгоритма Кули-Тьюки требует меньше комплексных операций умножения, чем алгоритм трехмерного БПФ при помощи комбинаций одномерного БПФ и работает быстрее его аналога в пакете Matlab.

#### Список литературы

- 1) Calculating the n-dimensional fast Fourier transform. V.S. Tutatchikov, O.I. Kiselev, M.V. Noskov. Pattern Recognition and Image Analysis July 2013, Volume 23, Issue 3, pp 429-433.
- 2) Потемкин В.Г. Система МАТЛАВ. Справочное пособие. – М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1997 – 350 с.