УДК 550.83

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ РЕШЕНИЯ ПРЯМОЙ ЭЛЕКТРОРАЗВЕДКИ

Заманова Р.Р., Рахимова З.Х.

научный руководитель к.ф.-м.н., доцент Викторов С.В

Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

Актуальной задачей разведочной геофизики является задача поиска и разведки новых месторождений полезных ископаемых. Одним из основных в общем комплексе геофизических методов при поиске и разведке является электроразведка. Электрические методы, являясь для недр экологически безопасными, наиболее эффективно позволяют исследовать залежи полезных ископаемых, оценивать их границы, размеры и форму. Также требуют переоценки уже разведанные запасы с учетом произведенной выработки с уточнением контуров залежей. Искусственно возбуждаемое электрическое поле обладает при малых частотах большой проникающей способностью, и искажаясь имеющимися неоднородностями, становится носителем информации об электромагнитных параметрах среды в зоне исследования, по которым можно судить о составе и свойствах пород. Наиболее значимыми параметрами месторождения являются его геометрические размеры, позволяющие прогнозировать его дальнейшую промышленную разработку.

Задачи такого типа относятся к классу обратных задач, суть которых заключается в восстановлении геоэлектрической модели разреза по электромагнитным полям, измеренным в некоторой части пространства. Решение обратной задачи основано на многократном решении прямой задачи, которая заключается в нахождении электромагнитного поля, возбуждаемого заданной системой источников в данной модели геоэлектрического разреза.

Рассмотрим прямую задачу для частного случая, когда в однородной изотропной среде находится одно локальное включение, аппроксимированное сфероидом.

1. Постановка задачи

Пусть в однородном изотропном полупространстве Ω_0 с удельной электрической проводимостью σ_0 содержится трехмерное локальное включение Ω_1 – сфероид с удельной электрической проводимостью σ_1 (см. рис 1).

Математическая модель поля точечного источника интенсивности I возбуждаемого в точке $A(x_A, y_A, z_A)$ от проводящего сфероида с границей S в однородном полупространстве описывается следующей задачей эллиптического типа:

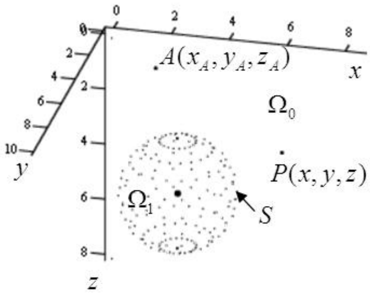


Рис.1. Сфероид в однородном полупространстве.

$$\Delta u_0(P) = -\frac{I}{\sigma_0}\delta(P-A), \;\; P \in \Omega_0; \qquad (1.1)$$

$$\Delta u_1(P) = 0, \; P \in \Omega_1; \qquad (1.2)$$

$$\left.\frac{\partial u_0(P)}{\partial z}\right|_{z=0} = 0; \qquad (1.3)$$

$$u_1(P)\big|_S = u_0(P)\big|_S, \quad \sigma_0 \left.\frac{\partial u_0(P)}{\partial n}\right|_S = \sigma_1 \left.\frac{\partial u_1(P)}{\partial n}\right|_S; \qquad (1.4)$$

$$u_0(P) \to 0, \;\; P \to \infty, \qquad (1.5)$$

где Δ – оператор Лапласа, δ – функция Дирака, *n* – вектор внешней нормали к поверхности *S*, (1.3) определяет контакт с непроницаемой средой, (1.4) – условия непрерывности потенциала и плотности тока, (1.5) – условие регулярности решения на бесконечности.

Описание поверхности сфероида *S* выполним в соответствии с формулами параметрического описания:

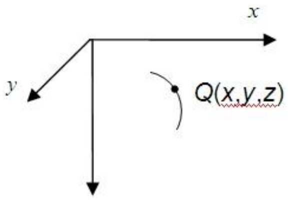
$$\begin{cases} x = x_{sh} + R_1 \cdot \cos\varphi \cdot \sin\psi, \\ y = y_{sh} + R_2 \cdot \sin\varphi \cdot \sin\psi, \\ z = z_{sh} + R_3 \cdot \cos\psi. \end{cases}$$

Решение задачи (1.1) – (1.5) построим методом интегральных представлений. Он формируется на основе интегральной формулы Остроградского с построением функции Грина для вмещающего пространства и является универсальным методом понижения геометрической сложности исследуемой среды. С другой стороны этот метод может быть использован также для поэтапного усложнения геометрии модели.[2]

2. Метод интегральных представлений решения задачи

Наряду с основной задачей (1.1) – (1.5) рассмотрим вспомогательную краевую задачу для функции источника в полупространстве Ω_0 без учета включения – задачу для функции Грина $G(P,Q)$:

$Q(x_Q, y_Q, z_Q)$ – источник тока; $P(x, y, z)$ – приёмник тока;



$$\Delta G_Q(P,Q) = -\delta(P-Q); \qquad (2.1)$$

$$\left.\frac{\partial G_Q}{\partial z}\right|_{z=0} = 0; \qquad (2.2)$$

$$G_Q(P) \to 0,\ P \to \infty. \qquad (2.3)$$

В соответствии с алгоритмом метода интегральных представлений выпишем интегральное представление решения исходной задачи и систему интегральных уравнений относительно неизвестных граничных значений потенциала на границах включений [3]. Для этого рассмотрим следующую формулу Остроградского:

$$\int_{\Omega} [\Delta u(Q) G(P,Q) - \Delta G(P,Q) u(Q)] d\Omega_Q = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u(Q)}{\partial n_Q} G(P,Q) - \frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q} u(Q) \right) d\partial\Omega_Q \quad (2.4)$$

Применим формулу (2.4) для областей Ω_0, Ω_1 исходной задачи.

В области Ω_0:

$$\int_{\Omega_0} (\Delta u_0 G - \Delta G u_0) d\Omega_0 = \int_{\partial\Omega_0} \left(\frac{\partial u_0}{\partial n} G - \frac{\partial G}{\partial n} u_0 \right) d\partial\Omega_0 \qquad (2.5)$$

Введем в рассмотрение параметр υ и интегральное свойство δ-функции:

$$\upsilon_i = \begin{cases} 1,\ P \in \mathring{\Omega}_i, \\ \tfrac{1}{2},\ P \in \partial\Omega_i, \\ 0,\ P \notin \overline{\Omega}_i. \end{cases} \quad \int_{\Omega} \mathrm{g}(P)\delta(P-Q) d\Omega_Q = \begin{cases} \mathrm{g}(P),\ P \in \mathring{\Omega}, \\ \tfrac{1}{2}\mathrm{g}(P),\ P \in \partial\Omega, \\ 0,\ P \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Тогда левая часть (2.5) будет иметь вид:

$$\int_{\Omega_0}[\Delta u_0(Q)G(P,Q)-\Delta G(P,Q)u_0(Q)]d\Omega_0=-\frac{I}{\sigma_0}\nu_0 G(P,A)+\nu_0 u_0(P). \quad (2.6)$$

Распишем правую часть равенства (1.13):

$$\int_{\partial\Omega_0}\left(\frac{\partial u_0}{\partial n}G-\frac{\partial G}{\partial n}u_0\right)d\partial\Omega_0=\int_{z=0}\left(\frac{\partial u_0}{\partial n}G-\frac{\partial G}{\partial n}u_0\right)d(z=0)+$$

$$+\int_S\left(\frac{\partial u_0}{\partial n}G-\frac{\partial G}{\partial n}u_0\right)dS=\left|\frac{\partial u_0}{\partial n}\overset{(3)}{=}0,\frac{\partial G}{\partial n}\overset{(3')}{=}0\right|=\int_S\left(\frac{\partial u_0}{\partial n}G-\frac{\partial G}{\partial n}u_0\right)dS.$$

Далее, предполагая, что $P\in\Omega_0$, имеем: $\nu_0=1$ (в первом слагаемом равенства (2.6)).

Для области Ω_0 получим:

$$-\frac{I}{\sigma_0}G(P,A)+\nu_0 u_0(P)=\int_S\left(\frac{\partial u_0}{\partial n_Q}G-\frac{\partial G}{\partial n_Q}u_0\right)dS \quad (2.7)$$

По аналогии применяя формулу (2.4) для области Ω_1 получим:

$$\nu_1 u(P)=\int_S\left(\frac{\partial u_1}{\partial n_Q}G-\frac{\partial G}{\partial n_Q}u_1\right)dS \quad (2.8)$$

Умножим обе части равенств (2.7) и (2.8) на σ_0, σ_1 соответственно и просуммируем их, с учетом правильного выбора направления вектора нормали:

$$-IG(P,A)+u(P)(\sigma_0\nu_0+\sigma_1\nu_1)=\int_S\left(\underline{\sigma_0\frac{\partial u_0}{\partial n_Q}G}-\sigma_1\frac{\partial u_1}{\partial n_Q}G+\underline{\underline{\sigma_0\frac{\partial G}{\partial n_Q}u}}-\underline{\underline{\sigma_1\frac{\partial G}{\partial n_Q}u}}\right)dS$$

Получим общую формулу интегрального представления решения задачи

$$u(P)(\sigma_0\nu_0+\sigma_1\nu_1)=(\sigma_0-\sigma_1)\int_S\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}u(Q)dS+IG(P,A) \quad (2.9)$$

Учитывая $P\in\Omega_0$, то $\nu_0=1,\nu_1=0$ и формула (2.9) примет вид

$$u(P)=\frac{(\sigma_0-\sigma_1)}{\sigma_0}\int_S\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}u(Q)dS+\frac{I}{\sigma_0}G(P,A) \quad (2.10)$$

Чтобы найти значение потенциала на границе *S*, положим, что $P\in S$.

Тогда $\nu_1=0.5,\ \nu_0=0.5$. Формула интегрального представления примет вид интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно неизвестного потенциала на границе *S*:

$$u(P)-\frac{2(\sigma_0-\sigma_1)}{\sigma_0+\sigma_1}\int_S\frac{\partial G(P,Q)}{\partial n_Q}u(Q)dS=\frac{2IG(P,A)}{\sigma_0+\sigma_1} \quad (2.11)$$

В итоге решение задачи будем искать по формулам (2.10), (2.11), в которых функция Грина (в случае однородного полупространства) имеет вид:

$$G(P,A)=\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2}}+\frac{1}{4\pi\sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z+z_A)^2}}$$

1.3. Вычислительный эксперимент

Ниже приведены результаты некоторых численных экспериментов.

В рамках курсовой работы на основе разработанных в работе [1], [4] алгоритмов была построена программа, позволяющая вычислять поле от точечного источника, расположенного в однородном изотропном полупространстве с локальным проводящем включением.

На рисунке 2 представлены графики аномального потенциала для решения (*Uan*), построенного по аналитическим формулам [5] и численных решений (*U1, U2, U3*), полученных для различных случаев, когда поверхность включения аппроксимировалась правильной сферой радиуса R=3 (здесь и далее линейные единицы измерения – метры) с дискретизацией N. Кривые на рисунке соответствуют следующим случаям: графику *U1* – N=25, графику *U2* – N=100, графику *U3* – N=400, графику *Uan* – аналитическое решение. Источника тока размещался в точке с координатами (20,0,0), точки приемника располагались на отрезке [-20,20], лежащей на оси абсцисс. Полученные решения показывают, что с увеличением параметра N численное решение задачи стремится к аналитическому.

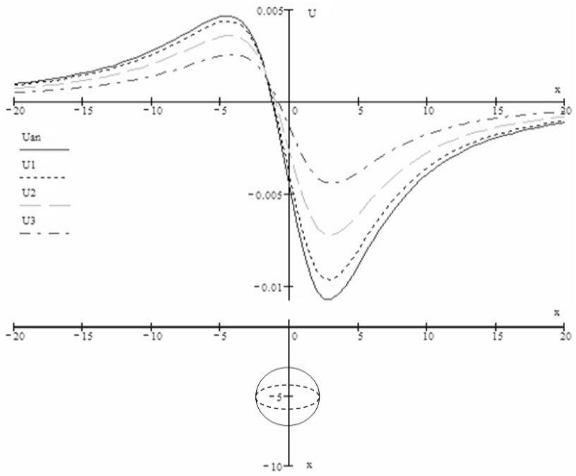


Рис.2. Распределения аномального потенциала по профилю приемников для шара.

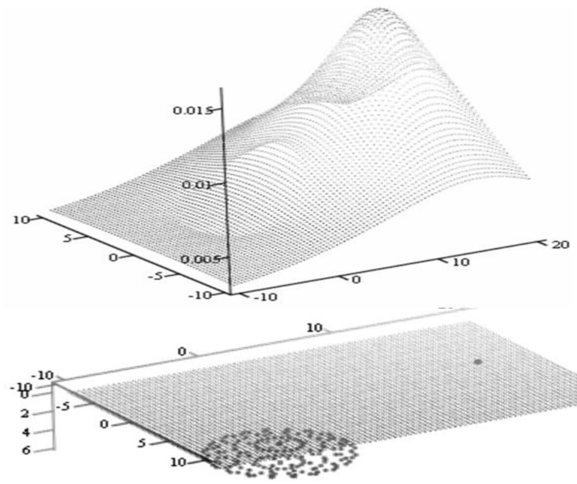


Рис.3. Распределения полного потенциала по площадке приемников для сжатого сфероида.

На рисунке 3 представлен график решения прямой задачи для случая, когда приемники располагались на площадке, расположенной на «дневной поверхности» над сжатым сфероидом. На построенной поверхности распределения полного потенциала отчетливо наблюдаются искажения на уровне источника тока и локального включения.

Список используемой литературы

1. Викторов С.В. Математическое моделирование геоэлектрических полей в осесимметричных средах со сплайн-аппроксимацией границ. Дисс. ... к.ф.-м.н., Стерлитамак, 2005, 106 с.
2. Воскобойников Г. М. О вычислении стационарных электромагнитных полей в некоторых кусочно-однородных средах.// Изв. АН СССР. Физика Земли. – 1973. – №9. – с. 63-76.
3. Иванов В.Т., Кризский В.Н. Решение некоторых задач электроразведки методом граничных интегральных уравнений // Известия ВУЗов. Геология и разведка – 1993. – №4. – с. 122-127.
4. Кризский В.Н., Викторов С.В. Математическое моделирование геоэлектрических полей в однородном полупространстве в присутствии тела вращения с образующей, аппроксимированной сплайном. - М.: ВНТИЦ, 2002, №50200200499.
5. Халфин Л.А. Поле точечного источника в присутствии сжатого и вытянутого

сфероидов// Известия АН СССР, Серия геофизическая, 1956, №6, С. 657–668.