Сибирский федеральный университет

Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук

Институт математики
Национальной академии наук
Республики Армения

IV российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам

Тезисы докладов

9 – 16 сентября, 2012

Красноярск, Россия

Siberian Federal University

Steklov Mathematical Institute
of Russian Academy of Sciences

Institute of Mathematics
of National Academy of Sciences
of Republic of Armenia

4th Russian-Armenian workshop on mathematical physics, complex analysis and related topics

Abstracts

September 9 – 16, 2012

Krasnoyarsk, Russia

УДК 517
ББК 22.1я73

Четвертое российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам : тезисы докладов / отв. ред. Знаменская О.В., Щуплев А.В. – Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2012. – 96 с.

ISBN 978-5-7638-2641-8

В настоящем издании опубликованы тезисы докладов, представленных на Четвертое российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам, Красноярск, 9 – 16 сентября 2012. Материалы адресованы участникам совещания, а также студентам, аспирантам и специалистам в области математической физики и комплексного анализа.

УДК 517
ББК 22.1я73

ISBN 978-5-7638-2641-8

Организаторы конференции

- Сибирский федеральный университет (СФУ), Красноярск, Россия;
- Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук (МИРАН), Москва, Россия;
- Институт математики Национальной академии наук Республики Армения, Ереван, Армения.

Основные направления работы совещания

- Многомерные вычеты и интегральные представления;
- Геометрия дискриминантов, амебы и коамебы;
- Математическая физика.

Спонсоры конференции

- Российский фонд фундаментальных исследований, грант 12-01-06074-г
- Сибирский федеральный университет
- Красноярский краевой фонд поддержки научной и научно-технической деятельности

Контакты:
E-mail: scv.krasnoyarsk@gmail.com

Сайт: http://conf.sfu-kras.ru/conf/math2012

Факс: +7 391 206 21 67,

Тел.: +7 391 206 20 76, +7 391 206 21 48

Адрес: Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79,
Сибирский федеральный университет, Институт математики.

The conference organized by

- Siberian Federal University (SFU), Krasnoyarsk, Russia;
- Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences (SMI RAS), Moscow, Russia;
- Institute of Mathematics of National Academy of Sciences of Republic of Armenia, Yerevan, Armenia.

The workshop will primarily focus on the following aspects

- Multidimensional residues and integral representations;
- Geometry of discriminants, amoebas and coamoebas;
- Mathematical physics.

Sponsors of the conference

- Russian Foundation for Basic Research, grant 12-01-06074-г
- Siberian Federal University
- Krasnoyarsk Regional Scientific Foundation

Contacts:

E-mail: scv.krasnoyarsk@gmail.com

Site: http://conf.sfu-kras.ru/conf/math2012

Fax: +7 391 206 21 67

Phone: +7 391 206 20 76, +7 391 206 21 48

Address: Russia, 660041, Krasnoyarsk, pr. Svobodnyi, 79,
Siberian Federal University, Institute of Mathematics.

Организационный комитет

- **Сопредседатели:**

Н. У. Аракелян *(ИМ НАН РА, Ереван, Армения)*,

В. В. Козлов *(МИ РАН, Москва, Россия)*

- **Заместители председателя:**

Н. Б. Енгибарян *(ИМ НАН РА, Ереван, Армения)*,

А. М. Кытманов *(ИМ СФУ, Красноярск, Россия)*,

А. Г. Сергеев *(МИ РАН, Москва, Россия)*

- **Организационный комитет:**

В. С. Владимиров *(МИ РАН, Москва, Россия)*,

А. А. Гончар *(МИ РАН, Москва, Россия)*,

И. В. Волович *(МИ РАН, Москва, Россия)*,

Д. В. Трещев *(МИ РАН, Москва, Россия)*,

Е. М. Чирка *(МИ РАН, Москва, Россия)*,

Р. Г. Бархударян *(ИМ НАН РА, Ереван, Армения)*,

В. В. Жаринов *(МИ РАН, Москва, Россия)*,

Н. Г. Кружилин *(МИ РАН, Москва, Россия)*,

А. Х. Хачатрян *(ИМ НАН РА, Ереван, Армения)*,

А. К. Цих *(ИМ СФУ, Красноярск, Россия)*

- **Ответственный секретарь конференции:**

А. В. Щуплев *(ИМ СФУ, Красноярск, Россия)*

- **Рабочий оргкомитет:**

О. В. Знаменская *(ИМ СФУ, Красноярск, Россия)*,

Е. Н. Михалкин *(ИМ СФУ, Красноярск, Россия)*,

Е. К. Лейнартас *(ИМ СФУ, Красноярск, Россия)*,

А. П. Ляпин *(ИМ СФУ, Красноярск, Россия)*

Organizing committee

- **Co-chairmen:**

N.U. Arakelyan *(IM NAS RA, Yerevan, Armenia)*,

V. V. Kozlov *(SMI RAS, Moscow, Russia)*

- **Deputy co-chairmen:**

N. B. Yengibaryan *IM NAS RA, Yerevan, Armenia)*,

A. M. Kytmanov *(IM SFU, Krasnoayrsk, Russia)*,

A. G. Sergeev *(SMI RAS, Moscow, Russia)*

- **Organizing committee:**

V. S. Vladimirov *(SMI RAS, Moscow, Russia)*,

A. A. Gonchar *(SMI RAS, Moscow, Russia)*,

I. V. Volovich *(SMI RAS, Moscow, Russia)*,

D. V. Treschev *(SMI RAS, Moscow, Russia)*,

E. M. Chirka *(SMI RAS, Moscow, Russia)*,

R. H. Barkhudaryan *(IM NAS RA, Yerevan, Armenia)*,

V. V. Zharinov *(SMI RAS, Moscow, Russia)*,

N. G. Kruzhilin *(SMI RAS, Moscow, Russia)*,

A. Kh. Khachatryan *(IM NAS RA, Yerevan, Armenia)*,

A. K. Tsikh *(IM SFU, Krasnoayrsk, Russia)*

- **Secretary:**

A. V. Shchuplev *(IM SFU, Krasnoayrsk, Russia)*

- **Assistants:**

O. V. Znamenskaya *(IM SFU, Krasnoayrsk, Russia)*,

E. N. Mikhalkin *(IM SFU, Krasnoayrsk, Russia)*,

E. K. Leinartas *(IM SFU, Krasnoayrsk, Russia)*,

A. P. Lyapin *(IM SFU, Krasnoayrsk, Russia)*

УДК 517.53

НАИЛУЧШИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЦЕЛЫМИ И МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

THE BEST APPROXIMATIONS BY ENTIRE AND MEROMORPHIC FUNCTIONS

Саркис Алексанян

Институт Математики, НАН Армении
asargis@instmath.sci.am, sargis.alexanyan@gmail.com

Задача об наилучшем равномерном приближении целыми функциями на углах исследовалась в работах А. Кобера [1], М. Келдыша [2] (см. доказательства в [3]), Н. Аракеляна и других авторов.

В [4] показано, что функцию f, голоморфную внутри угла раствора $\alpha+\delta$, т. е. такую, что $\Delta_{\alpha+\delta}$ и непрерывную на этом угле, $(\delta > 0)$ можно равномерно приблизить на Δ_α целыми функциями g, для роста которых была получена оценка, зависящая лишь от α, δ и от роста функции f на $\Delta_{\alpha+\delta}$; эти оценки непосредственно показывают возможный оптимальный порядок роста функции g в $\mathbb{C}$, но ничего не говорят об их типе. Более точные результаты о равномерном приближении на Δ_α целыми функциями получены в работах [4] и [5], в них приближение осуществляется на Δ_α, где функция f определена.

Полученные в докладе новые результаты улучшают и уточняют известные предыдущие результаты и также удается оценить не только порядок приближающих целых фунций, но и тип этих функций. В частности дается положительный ответ к теореме Кобера предложенной в работе [1].

В докладе рассматривается также задача наилучшего равномерного и касательного приближения на угле Δ_α и на полосе S_h мероморфными функциями оценкой роста приближающих мероморфных функций в терминах роста их неванлинновской характеристики.

В работе [6] Тер-Исраеляна рассматривалось задача равномерного и касательного приближения функции f, голоморфной в угле $\Delta_{\alpha+\delta}$, мероморфными функциями в Δ_α с оценкой роста приближающих мероморфных функций в терминах роста их неванлинновской характеристики. Затем в работе [7] был уточнен рост приближающих функций. В докладе приближение осуществляется на угле Δ_α, где определена функция f, дополнительно удовлетворяющая на границе Δ_α некоторым условиям.

В случае полосы улучшаются результаты полученные в [8].

Аналогичная задача равномерного и касательного приближения на вещественной оси $\mathbb{R}$ исследовалась в работе [9].

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Kober. *Approximation by integral functions in the complex plane,* Trans. Amer. Math. Soc., vol. 56, pp. 7-31, 1944.
2. М. В. Келдыш. *О приближении голоморфных функций целыми функциями.* ДАН СССР, т. 47, No 4, стр. 243-245, 1945.
3. С. Н. Мергелян. *Равномерные приближения функций комплексного переменного.* Успехи матем. наук, VII, вып. 2(48), стр. 31-122, 1952.
4. Н. У. Аракелян. *Равномерное приближение целыми функциями с оценкой их роста.* Сиб. Мат. Жур., т. 4, No 5, стр. 977-999, 1963.
5. S. H. Aleksanian and N. H. Arakelian. *Optimal uniform approximation on angles by entire functions.* Journal of Contemporary Mathematical Analysis NAS of RA, 2009, vol. 44, No 3, 149-164.
6. Л. А. Тер-Исраелян. *Равномерные и касательные приближения голоморфных в угле функций мероморфными с оценкой их роста.* Известия, АН АрмССР, серия Математика, т. 6, No 1, стр. 67-80, 1971.
7. Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян. *Наилучшие приближения мероморфными функциями в угловых областях.* Известия, АН АрмССР, серия Математика, т. 23, No 6, стр. 546-556, 1988.
8. S. H. Aleksanian. *Uniform and tangential approximation on a stripe by meromorphic functions, having optimal growth.* Journal of Contemporary Mathematical Analysis NAS of RA, 2008, vol. 43, No 6, 319-328.
9. Р. А. Аветисян, Н. У. Аракелян. *Наилучшие приближения мероморфными функциями на вещественной осы.* Известия, АН АрмССР, серия Математика, т. 25, No 6, стр. 534-548, 1990.

УДК 517.947.43

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ КОНВЕКЦИИ С НЕЛИНЕЙНОЙ СИЛОЙ ПЛАВУЧЕСТИ

ON SOME CONVECTION PROBLEMS WITH NON–LINEAR BUOYANCY FORCE

В. К. Андреев[1], В. Б. Бекежанова[1], И. В. Степанова[1]

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск
andr@icm.krasn.ru, vbek@icm.krasn.ru, stepiv@icm.krasn.ru

1. О конвекции бинарной смеси в вертикальном слое

Жидкости, встречающиеся в природе и технологических процессах, как правило, неоднородны. Конвективные течения бинарных смесей достаточно сложны, поскольку движение и диффузия частиц происходит не только под действием градиента концентрации, но и под влиянием градиента температуры. Такое явление называется термодиффузией или эффектом Соре.

Для смеси, характеризующейся уравнением состояния

$$\rho = \rho_0 F(T, C)$$

где ρ_0 — плотность жидкости при средних значениях температуры T и концентрации C, $F(T,C)$ — положительная гладкая функция, характеризующая силу плавучести, рассмотрены два режима движения, описывающие стационарное течение жидкости в плоском вертикальном слое. Предполагается, что горизонтальная компонента скорости равна нулю, а вертикальная зависит только от поперечной координаты. В первом случае движение индуцируется продольными постоянными градиентами давления, температуры и концентрации, в другом — постоянным градиентом концентрации и линейным по вертикальной компоненте градиентом давления. В том и другом случае уравнения движения сводятся к нелинейной системе ОДУ второго порядка, которые, в свою очередь, сведены к операторным уравнениям. В качестве граничных условий на стенках задаются условия прилипания, температура, отсутствие потока вещества. Средняя концентрация в слое считается известной.

Для поставленных задач доказан ряд общих свойств, найдены решения, проанализирована зависимость параметров течения от характера нелинейности функции $F(T,C)$, показано отличие результатов от классической модели термодиффузии в приближении Обербека – Буссинеска.

2. Устойчивость равновесных состояний и конвективных течений жидкостей

С целью изучения механизма глубинной циркуляции вод в озере Байкал [1] рассмотрен ряд задач теории гидродинамической устойчивости. Ясно, что обновление

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 11-01-00283, и СО РАН, междисциплинарный интеграционный проект № 44

глубинных вод характеризуется наличием нескольких основных механизмов. Интенсивность вертикального водообмена и связанных с этим процессов переноса примесей, во многом определяет температурная и плотностная стратификация вод озера. В рамках приближения Обербека – Бусиинеска учитывались особенности стратификации водной толщи:
- использованы уравнения состояния, позволяющие учесть эффект сжимаемости воды на больших глубинах и аномалию теплового расширения жидкости;
- в уравнение энергии введена функция теплового источника, описывающая поглощение солнечной радиации и определяющая температурную стратификацию жидкости, как в безлёдный период, так и при наличии ледяного покрова.

Изучены задачи об устойчивости равновесных состояний слоя вязкой теплопроводной слабосжимаемой жидкости и двухслойных систем с верхней свободной поверхностью и в случае, когда система ограничена теплопроводящей верхней стенкой конечной толщины.

Построено решение, содержащее независимый параметр и описывающее стационарное конвективное течение в цилиндре большого радиуса, ограниченного сверху и снизу твердыми стенками.

Впервые предпринята попытка оценить влияние солнечного излучения и оптических свойств воды на тепловой режим жидкости и устойчивость механического равновесия системы и конвективного течения. Во всех задачах определены области неустойчивости, длины волн критических возмущений и параметры возмущающих воздействий.

ЛИТЕРАТУРА

1. Shimaraev M.N., Verbolov V.A., Granin N.G., Sherstyankin P.P *Physical limnology of Lake Baikal: a Review.* Irkutsk–Okayama, 1994. 80 p.

УДК 517.55+519.1

УРАВНЕНИЕ ВИНЕРА-ХОПФА В НЕСИММЕТРИЧЕСКОМ ЗАКРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

THE WIENER-HOPF EQUATION IN THE NON-SYMMETRICAL SUPERCRITICAL CASE

Левон Арабаджян

Институт Математики, НАН Армении
arabajyan@mail.ru

Пусть J – единичный оператор, а $\breve{K}$ – скалярный интегральный оператор Винера-Хопфа:

$$(\breve{K}f)(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)dt, \qquad x \in R^+ \equiv (0,\infty), K \in L_1(R_1),$$

действующие в одном из пространств $L_p(R^+)$, $1 \le p \le \infty$, или $C(R^+)$. Разложение оператора $J - \breve{K}$ в виде

$$J - \breve{K} = (J - \breve{V}_-)(J - \breve{V}_+), \tag{1}$$

где $\breve{V}_\pm$ — вольтерровые операторы вида

$$(\breve{V}_+ f)(x) = \int_0^x V_+(x-t)f(t)dt,\ (\breve{V}_- f)(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)f(t)dt,\ x \in R^+,\ V_\pm \in L_1(R^+),$$

имеет непосредственное применение в вопросах разрешимости интегрального уравнения Винера-Хопфа:

$$f(x) = g(x) + \int_0^\infty K(x-t)f(t)dt,\ x \in R^+, \tag{2}$$

сводя решение этого уравнения к последовательному решению вольтерровых уравнений.

Построение факторизации (2) посредством решения следующей системы нелинейных функциональных уравнений:

$$\begin{cases} V_+(x) = K_+(x) = \int_0^\infty V_-(t)V_+(t+x) \\ V_-(x) = K_-(x) = \int_0^\infty V_+(t)V_-(t+x), \end{cases} x \in R^+, \tag{3}$$

где $K_\pm(x) = K(\pm x)$, $x > 0$, было реализовано в [1].

Уравнения вида (2) с действительными неотрицательными суммируемыми ядрами K: $0 \le K \in L_1(R_1)$, можно классифицировать посредством величины

$$\mu = \int_0^\infty K(x)dx :$$

(a) $0 < \mu < 1$ — диссипативные уравнения;
(b) $\mu = 1$ — консервативные уравнения;
(c) $\mu > 1$ — закритические уравнения.

В работе [1] была подробна изучена задача (1) в случаях (a) и (b), и полученные результаты применены к исследованию вопросов разрешимости соответствующих однородных и неоднородных уравнений (2) при $\mu \leq 1$. (Отметим, что в случае (b) оператор $J - \breve{K}$ необратим в любом из пространств $L_p(R^+)$, $1 \leq p \leq \infty$, $C(R^+)$).

Пусть $\hat{K}(s)$ – преобразование Фурье ядра K. Глубокое исследование факторизации (1) в закритическом случае (c), когда символ оператора $J - \breve{K}$ (или уравнения (2)) имеет действительный корень $s = s_0 \in R^+$ (это условие выполняется, в частности, когда ядро K – четная функция), а сами функции $K_\pm(x) = K(\pm)$, $x > 0$ вполне монотонны на R^+:

$$K_\pm \in C^\infty(R^+) \text{ и } (-1)^n K_\pm^{(n)} \geq 0 \text{ на } R^+,$$

была проведена в [2]. В случае, когда ядро K – четная функция, удовлетворяющая условиям

$$\mu > 1;\ 0 \leq K \in L_1(R^+) \cap C^2(R^+), K^{(1)} \leq 0,\ 0 \leq K^{(2)} \downarrow \text{ на } R^+,$$

в [3] построена факторизация (1), где ядра $V_\pm$ – комплекснозначные функции из $L_1(R^+)$.

Обобщением последнего результата является:

Теорема 1. *В закритическом случае (c), если символ оператора* $J - \breve{K}$ *(уравнения (2)) имеет действительный корень* $s = s_0 \in R$: $1 - \hat{K}(s_0) = 0$, *а функции* $K_\pm(x) = K(\pm)$, $x > 0$ *удовлетворяют условиям:*

$$0 \leq K_\pm \in L_1(R^+) \cap C^2(R^+),\ K_\pm^{(1)} \leq 0,\ K_\pm^{(2)} \leq 0 \downarrow \text{ на } R^+,$$

то существует факторизация (1), причем ядра $V_\pm$ *операторов* $\breve{V}_\pm$ *являются комплекснозначными функциями, принадлежащими* $L_1(R^+)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Енгибарян Н. Б., Арутюнян А. А., *Интегральные уравнения на полупрямой с разностными ядрами и нелинейные функциональные уравнения.* Математический Сборник, 1975, том 97, №5.
2. Енгибарян Н. Б., Енгибарян Б. Н., *Интегральные уравнения свертки на полупрямой со вполне монотонными ядрами.* Математический Сборник, 1996, том 187, №10.
3. Арабаджян Л.Г., *Об интегральном уравнении Винера-Хопфа в закритическом случае.* Математический Сборник, 2004, том 76, №1.

УДК 517.968

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ

SOLUTION OF TRANSFER EQUATION IN MOVING MEDIUM

А. Г. Барсегян

Институт Математики НАН РА
anibarseghyan@mail.ru

Рассматривается задача переноса в спектральной линии в случае, когда среда расширяется с постоянным градиентом скорости. Эта задача возникает в вопросах изучения линейчатых спектров туманностей, оболочек нестационарных звезд и др. В случае полного перераспределения по частотам искомая функция источника удовлетворяет следующему уравнению:

$$S(\tau) = S_0(\tau) + \frac{\lambda}{2}\int_r^R K(|\tau - t|)S(t)dt, \quad 0 < \lambda \leq 1, \tag{1}$$

где

$$K(\tau) = A\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)dx\int_0^1 \alpha(x+\gamma\tau\eta)\exp\left(-\int_0^x \alpha(x+\gamma\eta z)\frac{dz}{\eta}\right)\frac{d\eta}{\eta}, \tag{2}$$

$$\gamma > 0, \quad 0 < \alpha \in L_1(-\infty,\infty), \quad A = \left[\int_{-\infty}^{\infty}\alpha(x)dx\right]^{-1}.$$

В отличие от ряда хорошо известных задач переноса, ядерная функция (2) не представлена через суперпозиции экспонент. Это обстоятельство существенно усложняет численно-аналитическое решение уравнения (1). Предлагается метод решения (1), состоящий из следующих этапов:

а) Проводится дискретизация уравнения по τ, применением метода усреднения ядра Н. Б. Енгибаряна и автора. Задача сводится к алгебраической системе с теплицевой матрицей. Получена оценка точности как по равномерной, так и по интегральной норме.

б) Строится факторизация Винера-Хопфа бесконечной $2N+1$ диагональной теплицевой матрицы, порожденной дискретизованным уравнением, путем решения нелинейного уравнения факторизации.

в) В случае полупространства задача решается с привлечением небольших дополнительных процедур. В случае среды конечной толщины применяется «метод продолжения», развитый Н. Б. Енгибаряном и автором. Согласно этому методу, задача сводится к решению бесконечной системы с теплицевой матрицей и системы с ганкелевой матрицей.

УДК 517.962.8

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ С ДВУМЯ ПРЕПЯТСТВИЯМИ

NUMERICAL SOLUTION OF THE DOUBLE OBSTACLE PROBLEM

R. Barkhudaryan[1], S. Sajadini

Institute of Mathematics, NAS of Armenia
Department of Mathematics,The Royal Institute of Technology
rafayel@instmath.sci.am, sadna@kth.se

Let us consider a double obstacle problem which consists in minimizing the cost functional

$$\mathcal{J}(v) := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - \int_\Omega f v dx,$$

over the set of admissible "deformations"

$$\mathbb{K} := \{v \in H^1(\Omega),\ \varphi \le v \le \psi, x \in \Omega, v(x) = g(x),\, x \in \partial\Omega\}.$$

Here we assume that $n \geq 2$ and $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded open subset with Lipschitz-regular boundary,

$$g : \partial\Omega \to \mathbb{R}, \quad f : \Omega \to \mathbb{R}$$

are given functions such that g is continuous and located between the obstacles ($\varphi(x) \leqslant v(x) \leqslant \psi(x),\ x \in \partial\Omega$).

In the presented work we propose an algorithm for solving the double obstacle problem based on a finite difference method with 5 point stencil.

[1]R. Barkhudaryan would like to thank *Göran Gustafssons Foundation* for visiting appointment to KTH.

УДК 515.17+517.545

ОДНОЗНАЧНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ НА КОМПАКТНОЙ РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

SINGLE-VALUED DIFFERENTIALS ON A COMPACT RIEMANN SURFACE

М. И. Головина, В. В. Чуешев[1]

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск; Кемеровский государственный университет, Кемерово
aniram.ru@googlemail.com; vvchueshev@mail.ru

Теория однозначных (абелевых) дифференциалов (особенно случаи $q = 1$, $q = 2$) даже на фиксированной поверхности нашли многочисленные приложения в уравнениях математической физики, при алгебро-геометрическом интегрировании ряда нелинейных уравнений в работах Новикова С.П., Кричевера И.М., Дубровина Б.А., Тайманова И.А. и в теоретической физике (Дик Р., Климек С.), а также в аналитической теории чисел в работах Фаркаша Х., Кра И.

Пусть F – фиксированная компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^g$, т. е. упорядоченным набором образующих для $\pi_1(F)$, а F_0 – риманова поверхность с фиксированной комплексно-аналитической структурой на F.

Теорема 1. *На переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ для любого натурального числа $q > 1$ существует элементарный q–дифференциал τ_{q,Q_1Q_2} третьего рода точно с простыми полюсами*

$$Q_1 = Q_1[\mu], Q_2 = Q_2[\mu] \in F_\mu,$$

локально голоморфно зависящий от модулей $[\mu]$ поверхности F_μ, у которого общий вид дивизора $(\tau_{q,Q_1Q_2}) = \frac{R_1 \cdots R_N}{Q_1Q_2}$, где

$$\varphi(R_1 \cdots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q_1Q_2) - \varphi(R_{g+1} \cdots R_N)$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$. При этом точки $R_{g+1}, ..., R_N$ выбираются как локально голоморфное сечение дивизоров степени $N - g$ над пространством Тейхмюллера $\mathbb{T}_g$, $N = (2g-2)q+2$, и $Q_1 = Q_1[\mu]$, $Q_2 = Q_2[\mu]$ — локально голоморфные сечения дивизоров степени 1 на F_μ для $[\mu]$ из любой односвязной окрестности $U[\mu_0] \subset \mathbb{T}_g$.

Теорема 2. *На переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ для любых натуральных чисел $m \geq 2, q > 1$ существует элементарный q–дифференциал*

$$\tau_{q,Q}^{(m)} = (\frac{1}{z^m} + O(1))dz^q, \quad z(Q) = 0$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-00210-а и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-7347.2010.1).

с полюсом в любой точке $Q = Q[\mu] \in F_\mu$ *точно порядка* m, *локально голоморфно зависящий от* $[\mu]$, *у которого общий вид дивизора* $(\tau^{(m)}_{q,Q}) = \frac{R_1 \cdots R_N}{Q^m}$, *где*

$$\varphi(R_1 \cdots R_g) = -2K[\mu]q + \varphi(Q^m) - \varphi(R_{g+1} \cdots R_N).$$

При этом точки $R_{g+1}, ..., R_N$ *выбираются как локально голоморфное сечение дивизоров степени* $N-g$ *над* $\mathbb{T}_g$, *где* $N = (2g-2)q+m$ *и* $Q = Q[\mu]$ — *локально голоморфное сечение дивизоров степени 1 на* F_μ *для* $[\mu]$ *из любой односвязной окрестности* $U[\mu_0] \subset \mathbb{T}_g$.

Рассмотрим

$$\Omega(\frac{1}{P_1^{\alpha_1} \cdots P_l^{\alpha_l} P_{l+1} \cdots P_s}; F_\mu)$$

— пространство абелевых дифференциалов, кратных дивизору $\frac{1}{P_1^{\alpha_1} \cdots P_l^{\alpha_l} P_{l+1} \cdots P_s}$ при $s > 1,\ 0 \le l \le s$.

Теорема 3. *Векторное расслоение*

$$\bigcup_{[\mu]} \Omega(\frac{1}{P_1^{\alpha_1} \cdots P_l^{\alpha_l} P_{l+1} \cdots P_s}; F_\mu)$$

является голоморфным векторным расслоением ранга $\alpha_1 + \cdots + \alpha_l + s - l + g - 1$ *над* $\mathbb{T}_g$, *где набор*

$$\zeta_1, ..., \zeta_g, \tau^{(2)}_{P_1}, ..., \tau^{(\alpha_1)}_{P_1}, ..., \tau^{(2)}_{P_l}, ..., \tau^{(\alpha_l)}_{P_l}, \tau_{P_1 P_2}, ..., \tau_{P_1 P_s}$$

из $1-$*дифференциалов является базисом локально голоморфных сечений этого расслоения.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуешев В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности.* Кемерово:КемГУ, 2003. Ч. 2. 241 с.

УДК 517.968

О СУЩЕСТВОВАНИИ КАНОНИЧЕСКОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВИНЕРА-ХОПФА ВТОРОГО РОДА

ON EXISTENCE OF CANONICAL FACTORIZATION OF WINER-HOPF MATRIX INTEGRAL OPERATORS OF SECOND KIND

Н. Б. Енгибарян

Институт Математики НАН РА
yengib@instmath.sci.am

Пусть $\hat{K}$ – матричный интегральный оператор Винера-Хопфа:

$$\hat{K}f(x) = \int_0^\infty K(x-t)f(t)dt\,, \quad x \geq 0\,,$$

где матрица-функция

$$K \in L_1^{m\times m}(-\infty, \infty).$$

Рассматривается каноническая факторизация (КФ)

$$I - \hat{K} = (I - \hat{V}_-)(I - \hat{V}_+)\,,$$

где I – единичный оператор, $\hat{V}_\pm$ операторы свертки типа Вольтерра

$$\hat{V}_+ f(x) = \int_0^x V_+(x-t)f(t)dt$$

$$\hat{V}_- f(x) = \int_x^\infty V_-(t-x)f(t)dt$$

$$V_\pm \in L_1^{m\times m}(0,\infty).$$

такие, что $I - \hat{V}_\pm$ обратимы в $L_p^m(0,\infty)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Доказывается, что для существования КФ необходимо и достаточно, чтобы оператор $I - \hat{K}$ и транспонированный к нему оператор $I - \hat{K}^T$ были обратимы в пространстве $L_1^m(0,\infty)$.

УДК 517.968

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СВЕРТКИ

APPROXIMATE SOLUTION OF CONVOLUTION INTEGRAL EQUATIONS

Н. Б. Енгибарян, А. Г. Барсегян

Институт Математики НАН РА
yengib@instmath.sci.am, anibarseghyan@mail.ru

Доклад посвящен описанию некоторых специальных и общих методов приближенного численного и аналитического решения интегрального уравнения свертки

$$f(\tau) = g(\tau) + \int_0^r K(\tau - t) f(t) dt, \quad K \in L_1(-r, r), \quad r \leq +\infty . \tag{1}$$

Уравнение (1) на полупрямой (уравнение Винера-Хопфа)(а также — уравнение на всей прямой) в неособых случаях допускают замкнутое аналитическое решение через прямые и обратные преобразования Фурье (ПФ). Однако численная реализация этих ПФ с гарантированной точностью в более-менее общих ситуациях сопряжена с непреодолимыми трудностями.

Достаточно полно развиты методы решения (1) в случаях, когда символ уравнения (1) является рациональной функцией или хорошо аппроксимируется такими функциями. Большой круг таких задач, возникающих в математической физике и в теории случайных процессов, эффективно решается путем сочетания уравнения Амбарцумяна и метода дискретных ординат.

Методы механических квадратур основаны на замене уравнения (1) конечной алгебраической системой вида

$$\gamma_j = g(\zeta_j) + \sum_{m=0}^{N-1} a_m K(\zeta_j - \zeta_m) \gamma_m ,$$

где (ζ_j) узлы применяемой квадратуры, а (a_j) – весовые множители. Такая дискретизация обычно нарушает сверточную структуру уравнения и (на наш взгляд) обладает рядом других негативных особенностей.

Авторами развит метод усреднения ядра для решения уравнения (1). В пространстве непрерывных функций уравнение (1) заменяется следующей линейной алгебраической системой с теплицевой матрицей:

$$\gamma_j = g(\zeta_j) + \sum_{m=0}^{N-1} a_{j-m} \gamma_m , \quad j = 0, \cdots , N-1 , \tag{2}$$

где $a_m = \int\limits_{(m-\frac{1}{2})k}^{(m+\frac{1}{2})k} K(x)dx$, $N = \dfrac{r}{h}(\leq \infty)$. Приближенное аналитическое решение уравнения (1) выражается через K, g, (γ_i). Получена количественная оценка близости, гарантирующая сходимость метода при $h \to 0$. К уравнению (2) могут быть применены известные методы решения конечных и бесконечных алгебраических систем с теплицевыми матрицами.

УДК 517.442

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО – КРАЕВЫХ ЗАДАЧ О СОВМЕСТНОМ ДВИЖЕНИИ БИНАРНОЙ СМЕСИ И ВЯЗКОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОЙ ЖИДКОСТИ

SOLUTION OF AN INITIAL —BOUNDARY PROBLEM ON THE MOTION OF THE BINARY MIXTURE AND THE VISCOUS LIQUID

М. В. Ефимова[1]

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск
efmavi@icm.krasn.ru

В данной работе изучается инвариантное решение задачи о совместном движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости. Источником движения являются нестационарные градиенты давления и термоконцентрационные эффекты на поверхности раздела. Анализ движения сводится к решению трех сопряженных начально – краевой задаче для параболических уравнений, описывающих возмущения скорости, температуры и концентрации в слоях. Найдено решение соответствующих задач, описывающих стационарное течение. Показано, что если движение в системе возникает под действием термоконцентрационных сил, то в слоях реализуется течение типа Куэтта. В случае существования конечного предела градиента давления скорости выходят на стационарный режим типа течения Пуазейля. Если же градиент давления в одной из жидкостей достаточно быстро стремится к нулю, то происходит торможение системы за счет вязкого трения.

В случае нестационарного движения проинтегрировать уравнения в явном виде не удается, для решения применяется метод Лапласа [1]. В результате получено точное аналитическое решение задач для определения поля скоростей, температур и концентрации в изображениях по Лапласу. Численное восстановление параметров движения показало, что функции скорости и температуры при больших временах выходят на стационарный режим и совпадают с решениями соответствующих стационарных задач. Аналогичное утверждение для распределения концентрации в слое будет справедливо только в том случае, если в начальный момент времени будет отсутствовать градиент этой величины в направлении движения.

Полученные результаты могут применяться для описания двухфазных систем в миниканалах, в слабых силовых полях, процессов охлаждения пленок потоками жидкости или газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. *Методы теории функций комплексного переменного.* М.: Наука, 1973. 736 с.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 11-01-00283, проект № 38, № 116 фундаментальных исследований СО РАН.

УДК 517.55

РЯДЫ ДИРИХЛЕ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С НАБОРОМ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

DIRICHLET SERIES ASSOCIATED WITH A FAMILY OF QUASI-ELLIPTIC POLYNOMIALS

Е. В. Зубченкова

Сибирский федеральный университет, Красноярск
elenazubchenkova@rambler.ru

Рассматриваются кратные ряды Дирихле

$$Z(P;s)=Z(P_0,P_1,...,P_m,s_1,...,s_m)=\sum_{k\in K\subset\mathbb{Z}^n}\frac{P_0(k)}{P_1(k)^{s_1}...P_m(k)^{s_m}}, \qquad (1)$$

ассоциированные с набором полиномов $P_0,P_1,...,P_m$ от n переменных. В качестве множества суммирования K естественно брать многогранные конусы; мы ограничимся случаем, когда $K=\mathbb{Z}^n$, либо $K=\mathbb{Z}^n_+$. В случае $n=m=1$ такие ряды обобщают классическую дзета-функцию Римана. Их изучение при $n>m=1$ было положено Меллином [1]. Видимо, для произвольных n,m они впервые встречаются в работе [2], в которой доказано мероморфное продолжение в $\mathbb{C}^m$ функции $Z(P;s)$, ассоциированной с набором гипоэллиптических полиномов $P_1,...,P_m$. Напомним, что полином $Q(x)=Q(x_1,...,x_n)$ называется *гипоэллиптическим*, если

$$Q^{(\alpha)}(x)Q^{-1}(x)\to 0 \ \text{ при } \ |x|\to\infty, x\in\mathbb{R}^n$$

для всех производных $Q^{(\alpha)}$ порядка $|\alpha|>0$ (см. [3]).

В настоящей работе исследуется поведение ряда $Z(P;s)$ в предположении, что $P_1,...,$
P_m- квазиэллиптические полиномы с полными многогранниками Ньютона $\Delta_j=\Delta(P_j)$, не обращающиеся в нуль на K. Понятие квазиэллиптичности введено в статье ([4]): полином $Q=\sum\limits_{\alpha\in A}a_\alpha x^\alpha$ называется *квазиэллиптическим*, если для всякого ненулевого направления $\lambda\in\mathbb{R}^{n*}$ срезка $Q_\lambda=\sum\limits_{\alpha\in\Delta^\lambda}a_\alpha x^\alpha$ не обращается в нуль в $(\mathbb{R}\setminus\{0\})^n$. Здесь $\Delta^\lambda=\{k\in\Delta:\langle\lambda,k\rangle=\min\limits_{l\in\Delta}\langle\lambda,l\rangle\}-$ грань многогранника Ньютона $\Delta=\Delta(P)$ в направлении λ, а $\mathbb{R}^{n*}-$ пространство, сопряженное к $\mathbb{R}^n$.

Согласно [5], многогранник Δ называется *полным*, если

$$\beta\in\Delta\Rightarrow\{\gamma\in\mathbb{R}^n_+,\gamma<\beta\}\subset\Delta.$$

Запись $\gamma<\beta$ означает, что $\gamma_1<\beta_1,...,\gamma_n<\beta_n$.

Для таких полиномов верна следующая теорема, где $I=(1,...,1)\in\ \mathbb{R}^n$, а Δ^0_s- внутренность суммы Минковского

$$\Delta_s=\mathrm{Re}(s_1)\Delta_1+...+\mathrm{Re}(s_m)\Delta_m.$$

Теорема 1. *Ряд $Z(P;s)$ сходится в области*

$$\{s \in \mathbb{C}^m : I + \Delta(P_0) \subset \Delta_s^0\}$$

и, следовательно, представляет в ней голоморфную функцию.

Утверждение Теоремы 1 можно интерпретировать как проявление интегрального признака сходимости кратных рядов. Специфика ряда (1) состоит в том, что его члены голоморфны в окрестностях точек $k \in K$ и могут быть представлены как вычеты с универсальным (не зависящим от k) весовым ядром. В результате ряд мажорируется интегралом по $\mathbb{R}^n$. У этого интеграла подынтегральная форма не имеет полюсов на бесконечных дивизорах подходящей торической компактификации $\mathbb{R}^n$ именно при условии $I + \Delta(P_0) \subset \Delta_s^0$.

Связь между введенными обобщениями понятия эллиптичности выражает следующая

Теорема 2. *Квазиэллиптический полином, не обращающийся в нуль на $\mathbb{R}^n$ и имеющий полный многогранник Ньютона, является гипоэллиптическим.*

Ее доказательство основано на построении подходящей вещественной торической компактификации $X \supset \mathbb{R}^n$. Последняя теорема, совместно с результатами работы [2], позволяет заключить мероморфное продолжение рассматриваемого ряда $Z(P;s)$ на все пространство $\mathbb{C}^m$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Mellin HJ. *Die dirichlet'schen reihen, die zahlentheoretischen funktionen und die unendlichen producte von endlichem geschlecht* // Acta Math. 1903. Vol. 28. P. 37–64.
2. Lichtin B. *The asymptotics of a lattice problem associated a finite number of polynomials I* // Duke Math. J. 1991. № 63. Vol. 1. P. 139–192.
3. Хермандер Л. *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*: в 4 т. М.: Мир, 1986. Т. 2: Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. 456 с.
4. Ермолаева Т.О., Цих А.К. *Интегрирование рациональных функций по $\mathbb{R}^n$ с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов* // Матем. сборник. 1996. Т. 187, № 9. С. 45–64.
5. Волевич Л.Р., Гиндикин С.Г. *Об одном классе гипоэллиптических полиномов* // Матем. сборник. 1968. Т. 75(117), № 3. С. 400–416.

УДК 517.98

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ РЕГУЛЯРИЗАТОРОВ В СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

ON SOME APPLICATIONS OF AN REGULARIZIERS IN SPECTRAL THEORY OF UNBOUNDED LINEAR OPERATORS

В. М. Каплицкий

kaplitsky@donpac.ru

Понятие регуляризатора ограниченного линейного оператора $T : X \to X$ в банаховом пространстве X играет важную роль в исследованиях линейных операторных уравнений [1,2]. В терминах существования односторонних регуляризаторов удобно формулировать условия нётеровости, теоремы о свойствах образа оператора T и свойствах разрешимости линейных уравнений, содержащих оператор T. В теории псевдодифференциальных операторов (ПДО)как известетно, широко используется понятие параметрикса ПДО. Параметрикс ПДО является каноническим регуляризатором специального вида, так как в определении параметрикса требуется чтобы параметрикс принадлежал алгебре псевдодифференциальных операторов. В работе вводятся в рассмотрение односторонние и односторонние канонические регуляризаторы неограниченного линейного оператора в банаховом пространстве. Рассмотрены некоторые приложения этих понятий в спектральной теории неограниченных замкнутых операторов в гильбертовом пространстве. Пусть $D(T)$ — плотное в X линейное многообразие и $T : D(T) \to X$ — неограниченный замкнутый линейный оператор. Ограниченный линейный оператор $R_1 : X \to X$ такой, что $\mathrm{Ran}(R_1) \subset D(T)$ и $TR_1x = A_1x$, где A_1 — ограниченный линейный оператор в X, называ- ется правым регуляризатором оператора T. Ограниченный линейный оператор $R_2 : X \to X$ называется левым регуляризатором оператора T, если $R_2Tx = A_2x$ при $x \in D(T)$, где A_2 — ограниченный линейный оператор в X. Пусть у оператора T существует правый регуляризатор R_1 такой , что $TR_1x = x+K_1x$, где K_1 — компактный оператор в X. Тогда будем говорить, что R_1 — канонический правый регуляризатор оператора T. Аналогичным образом вводится понятие канонического левого регуляризатора . Двусторонний регуляризатор будем называть просто регуляризатором, а двусторонний канонический регуляризатор — каноническим регуляризатором. В теории дифференци- альных уравнений основной интерес представляют канонические регуляризаторы. Определения спектра, дискретного спектра, корневых векторов линейного оператора или аналитической оператор-функции, функций распределения собственных (характеристических) чисел аналитической оператор-функции, лежащих в заданной области Ω,см.в [3]. Пусть $\varepsilon > 0$ и

$$\Omega^+ = \{\lambda \in \mathbb{C} : -\varepsilon < \arg\lambda < \varepsilon\},$$

$$\Omega^- = \{\lambda \in \mathbb{C} : \pi - \varepsilon < \arg\lambda < \pi + \varepsilon\}.$$

Через $N(r;T)$ обозначим функцию распределения собственных значений оператора T, лежащих в области $\Omega = \Omega^+ \cup \Omega^-$. Если K—компактный самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве H, то через $\widetilde{N}(r;K)$ будем обозначать число характеристических чисел оператора K (с учётом алгебраической кратности), лежащих на отрезке $[-r,r]$.

Теорема 1. *Пусть $T : D(T) \to H$—неограниченный замкнутый оператор в гиль- бертовом постранстве H. Пусть у оператора T существует самосопряженный кано- нический регуляризатор R , принадлежащий одному из идеалов Шаттена-фон Неймана $\mathfrak{S}_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Тогда спектр оператора T искретен, а система корневых векторов оператора T полна в H. При этом все собственные числа, за исключением, быть может , конечного числа , лежат в объединении секторов $\Omega^{\pm}$. Если функция распределе- ния характеристических чисел компактного оператора R удовлетворяет условию:*

$$\lim_{\varepsilon\to 0, r\to\infty} \frac{\widetilde{N}((1+\varepsilon)r;R)}{\widetilde{N}(r;R)} = 1,$$

то $N(r;T) \sim \widetilde{N}(r;R)$ при $r \to \infty$.

Теорему 1 можно применять, например, для вычисления асимтотики дискретного спектра неполуограниченного дифференциального оператора с негладкими коэффицентами на многобразии, в некоторых случаях, когда использование других методов (метода параболического уравнения, метода приближённого спектрального проектора) затруднительно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кутателадзе С.С. *Основы функционального анализа.* Новосибирск, Изд-во института математики, 2000, 336 с.
2. Прёсдорф З. *Некоторые классы сингулярных интегральных уравнений.* М., Мир, 1973, 494с.
3. Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве.* М.,Наука, 1965, 448 с.

УДК 517.552

ТОЖДЕСТВА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНО ВЫПУКЛЫХ ПОЛИЭДРАХ

ON WEIGHTED SOLUTIONS OF $\overline{\partial}$–EQUATION IN THE SIEGEL DOMAIN OF C^n

A. H. Karapetyan

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia,
Marshal Bagramian Ave.24 B, Yerevan, Armenia
armankar2005@rambler.ru

Let us write arbitrary $\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) \in C^n$ as $\eta = (\eta_1, \eta')$, where $\eta' = (\eta_2, \ldots, \eta_n) \in C^{n-1}$. Let $< \bullet, \bullet >$ be the Hermitian inner product in C^n, i.e.

$$< \omega, \eta >= \sum_{k=1}^{n} \omega_k \cdot \overline{\eta_k} \equiv \omega_1 \cdot \overline{\eta_1} + < \omega', \eta' >$$

for arbitrary $\omega = (\omega_1, \omega') \in C^n, \eta = (\eta_1, \eta') \in C^n$. Further, put

$$|\eta|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k|^2 \equiv |\eta_1|^2 + |\eta'|^2, \quad \forall (\eta_1, \eta') \in C^n.$$

The Siegel domain in the space C^n is defined as follows:

$$\Omega_n = \{(\eta_1, \eta') \in C^n : Im\eta_1 > |\eta'|^2\}. \tag{1}$$

It is well-known that Ω_n is biholomorphically equivalent to the unit ball $B_n \subset C^n$ (by means of Cayley transforms). Besides, for $n = 1$ Ω_n can be naturally interpreted as the upper half-plane $\Pi_+ \subset C$.

Assume that $u(\eta) = \sum_{k=1}^{n} u_k(\eta) d\overline{\eta_k} \quad (\eta \in \Omega_n)$ is a $\overline{\partial}-$closed differential form of type $(0,1)$ and $u \in C^1(\Omega_n) \Leftrightarrow u_k \in C^1(\Omega_n) (1 \leq k \leq n)$. In other words, $u(\eta) = (u_1(\eta), u_2(\eta), \ldots, u_n(\eta))$ is a C^1-vector-function in Ω_n such that $\partial u_k(\eta)/\partial \overline{\eta_j} \equiv \partial u_j(\eta)/\partial \overline{\eta_k} (1 \leq k, j \leq n), \eta \in \Omega_n$.

For a complex number β with $Re\beta > -1$ consider the following integral operator:

$$T_{n,\beta}(u)(\omega) = -2^{n+\beta} \cdot c_{n,\beta} \cdot \int_{\Omega_n} < u(\eta), \eta - \omega > \frac{(Im\eta_1 - |\eta'|^2)^{\beta+1}}{[i(\overline{\eta_1} - \omega_1) - 2 < \omega', \eta' >]^{\beta+1}} \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{n-1} C_{n-1}^{p} \frac{(-4)^p}{p+1+\beta} \left(\frac{(Im\omega_1 - |\omega'|^2)(Im\eta_1 - |\eta'|^2)}{|i(\overline{\eta_1} - \omega_1) - 2 < \omega', \eta' >|^2} \right)^p \times$$

$$\times \frac{[(i(\overline{\omega_1}-\eta_1)-2<\eta',\omega'>]^{n-1}}{\Big(|i(\overline{\eta_1}-\omega_1)-2<\omega',\eta'>|^2-4(Im\omega_1-|\omega'|^2)(Im\eta_1-|\eta'|^2)\Big)^n}dm(\eta),$$

$$\omega\in\Omega_n, \tag{2}$$

where

$$c_n(\beta)=\frac{1}{\pi^n}\cdot\frac{\Gamma(n+1+\beta)}{\Gamma(1+\beta)}.$$

The following assertion is true:

Theorem. *Assume that* $\alpha>-\frac{1}{2}, Re\beta\geq 2\alpha$. *If* u *is a* $\overline{\partial}-$*closed* C^1-*differential form of type* $(0,1)$ *satisfying the condition*

$$||u||_{\alpha,n}\equiv\int_{\Omega_n}\frac{|u(\eta)|\cdot(Im\eta_1-|\eta'|^2)^\alpha}{|\eta_1+i|^n}dm(\eta)<+\infty, \tag{3}$$

where

$$|u(\eta)|\equiv\left(\sum_{k=1}^n|u_k(\eta)|^2\right)^{1/2},\quad \eta\in\Omega_n,$$

then the function $f_\beta(\omega)\equiv T_{n,\beta}(u)(\omega)$ *is a solution of the following* $\overline{\partial}-$*equation:*

$$(\overline{\partial}f_\beta)(\omega)=u(\omega),\quad \omega\in\Omega_n\quad\Leftrightarrow\quad\frac{\partial f_\beta}{\partial\overline{\omega_k}}(\omega)=u_k(\omega)(1\leq k\leq n),\quad\omega\in\Omega_n. \tag{4}$$

Moreover, we have:

$$\int_{\Omega_n}\frac{|f(\omega)|\cdot(Im\omega_1-|\omega'|^2)^{Re\beta-\alpha-1/2}}{|\eta_1+i|^{Re\beta-2\alpha+n}}dm(\eta)\equiv$$

$$\equiv||f||_{Re\beta-\alpha-1/2,Re\beta-2\alpha+n}\leq const(\alpha,\beta,n)\cdot||u||_{\alpha,n}. \tag{5}$$

In particular (taking $\beta=2\alpha$*), we have:*

$$\overline{\partial}f_{2\alpha}=u\quad and\quad ||f||_{\alpha-1/2,n}\leq const(\alpha,n)\cdot||u||_{\alpha,n}. \tag{6}$$

УДК 517.538.3

АСИМПТОТИКА СТАРШИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОЛИНОМОВ, ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕМЕННОГО ВЕСА

LEADING COEFFICIENTS ASYMPTOTICS FOR ORTHONORMAL POLYNOMIALS WITH RESPECT TO VARYING WEIGHT.

А. В. Комлов[1], С. П. Суетин[1]

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
komlov@mi.ras.ru, suetin@mi.ras.ru

Пусть $Q(x) = x^{2m} + \cdots$ – полином четной степени $2m$ с вещественными коэффициентами и единичным старшим коэффициентом; в дальнейшем полином Q будет играть роль «внешнего поля» (точнее, потенциала внешнего поля) в стандартной теоретико-потенциальной задаче равновесия.

В классе $M_1(\mathbb{R})$ единичных (положительных борелевских) мер μ с носителями $\operatorname{Supp}\mu$ на вещественной прямой $\mathbb{R}$ рассмотрим следующую теоретико-потенциальную задачу равновесия для логарифмического потенциала

$$V^\mu(x) = -\int \log|x-t|\,d\mu(t)$$

с внешним полем $Q(x)$ (см. [1]): *найти меру $\lambda \in M_1(\mathbb{R})$ такую, что*

$$V^\lambda(x) + Q(x) \begin{array}{ll} \equiv w_Q, & x \in S, \quad S = \operatorname{Supp}\lambda, \\ \geq w_Q, & x \in \mathbb{R} \setminus S. \end{array} \tag{1}$$

Существует *единственная* мера $\lambda = \lambda_Q \in M_1(\mathbb{R})$, удовлетворяющая соотношению (1), λ называется *равновесной мерой*, w_Q – *постоянная равновесия*.

Известно (см. [2]), что для полиномиального потенциала $Q(x)$ носитель S равновесной меры состоит из нескольких (непересекающихся) отрезков, $S = \bigsqcup_{j=1}^p S_j$, $S_j = [s_{2j-1}, s_{2j}]$. Пусть $E = \bigsqcup_{j=1}^p E_j$, где $E_j = [e_{2j-1}, e_{2j}] \subset \operatorname{int} S_j$, $j = 1, \dots, p$ ($\operatorname{int} S_j$ – внутренность отрезка S_j), $\lambda = \lambda_{Q,E} \in M_1(E)$ – (единственная) равновесная во внешнем поле Q мера с *носителем на* $E \subset \operatorname{int} S$:

$$V^\lambda(x) + Q(x) = w_{Q,E}, \quad x \in E. \tag{2}$$

Подчеркнем, что в (2) в отличие от (1) рассматриваются единичные меры с *носителями на* E. Задача равновесия (2) соответствует предельному случаю внешнего поля $Q \cdot (1/\chi_E)$, где χ_E – характеристическая функция множества E. Хорошо известно, что в этом случае равновесная мера имеет следующий вид

$$d\lambda(x) = \frac{h(x)}{H_+^{1/2}(x)}\,dx, \qquad x \in E, \tag{3}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11-01-00330-а и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-4664.2012.1).

где функция h голоморфна и отлична от нуля на E,

$$H(z) = H_{2p}(z) := \prod_{j=1}^{2p}(z - e_j),$$

и выбрана такая ветвь корня, что $H^{1/2}(z) \sim z^p$ при $z \to \infty$; под $H_+^{1/2}(x)$ в (3) и всюду в дальнейшем понимаются предельные значения функции $H^{1/2}(z)$ при $z \to x \in S$ из верхней полуплоскости. Обозначим функцию $H^{1/2}(z)$ через функцию $W(z)$.

Пусть на E задан вес

$$\sigma_n(x) = \frac{i\rho_n(x)}{2\pi W^+(x)} > 0, \quad x \in E, \quad \rho_n(x) := p_g(x)e^{-2nQ(x)}, \tag{4}$$

где $p_g(x) = x^g + \cdots$ – фиксированный полином степени $g = p - 1$, у которого в каждой лакуне (то есть на интервале (e_{2j}, e_{2j+1}), $j = 1, \dots, g$) лежит ровно по одному нулю (тем самым, в каждой лакуне этот полином меняет знак в точности один раз; наличие этого полинома носит вспомогательный характер и компенсирует перемену знака у функции $W^+(x)/i$ при переходе с отрезка E_j на отрезок E_{j-1}).

Пусть $q_n(x; N) = \alpha_n(N)x^n + \cdots$, $\alpha_n(N) > 0$, – полиномы, ортонормированные на E относительно веса $\sigma_N(x)$:

$$\int_E q_n(x; N)q_m(x; N)\sigma_N(x)\,dx = \delta_{n,m}. \tag{5}$$

Основная цель данной работы — *изучить асимптотику $\alpha_n(n)$, то есть при $N = n$.* Случай одного отрезка $E = [-1, 1]$ изучен в работе [3, теорема 2]; наша работа обобщает этот результ на случай произвольного числа отрезков $p \geq 2$.

Через $\mathfrak{R}$ обозначим гиперэллиптическую риманову поверхность рода $g = p - 1$, заданную уравнением $W^2 = \prod_{j=1}^{2p}(z - e_j)$. Пусть $g(\mathbf{z}, \infty)$ — гармоническое продолжение функции Грина $g(z, \infty)$ области $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$ с особенностью в бесконечности на риманову поверхность $\mathfrak{R}$.

Теорема 1. *Для старшего коэффициента $\alpha_n(n)$ полинома $q_n(x; n)$, ортонормированного относительно веса $\sigma_n(x)$, имеет место следующая формула сильной асимптотики:*

$$\alpha_n(n) = \mathrm{const} \cdot e^{nw_Q} \cdot \exp\biggl\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{g} g(\mathbf{z}_j(n), \infty)\biggr\}\bigl(1 + o(1)\bigr), \quad n \to \infty, \tag{6}$$

где $o(1) = O(\delta^n)$, $\delta \in (0, 1)$, $\mathrm{const} = \mathrm{const}(E, p_g)$ зависит только от множества E и вспомогательного полинома p_g. Точки $\mathbf{z}_j(n) = (z_j(n), \pm)$ на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ таковы, что $z_j(n) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, $j = 1, \dots, g$, и однозначно определяются из решения задачи обращения Якоби:

$$\sum_{j=1}^{g}\Omega_k(\mathbf{z}_j)\equiv-\sum_{j=1}^{g}\{n\lambda(E_j)\}B_{kj}+c_k,\qquad k=1,\dots,g;\tag{7}$$

здесь $\{\,\cdot\,\}$ *означает дробную часть соответствующего числа,* c_k *– некоторые постоянные (не зависящие от* n*),* $\equiv$ *означает сравнение по модулю периодов базисных абелевых дифференциалов* $d\Omega_k$ *для* $\mathfrak{R}$*,* Ω_k *– соответствующие абелевы интегралы,* $\|B_{kj}\|$ *– матрица Римана для* $\mathfrak{R}$*.*

Доказательство теоремы 1 основано на следующем результате. Оказывается, что равномерно на компактных подмножествах K области $D=\overline{\mathbb{C}}\setminus E$ асимптотика ортонормированных полиномов $q_n(z;n)$ полностью описывается в терминах так называемой *пси-функции Наттолла*. Пси-функция Наттолла $\Psi_n(\mathbf{z};\rho)$ — это функция, заданная на римановой поверхности $\mathfrak{R}$ и являющаяся нормированным решением следующей краевой задачи Римана (см. [4], [5]).

Обозначим через $\mathcal{L}_j$ замкнутые циклы на $\mathfrak{R}$ такие, что $\operatorname{proj}\mathcal{L}_j=E_j$ ($\operatorname{proj}(\cdot)$ – каноническая проекция $\mathfrak{R}$ на $\overline{\mathbb{C}}$). Пусть $\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\sqcup\dots\sqcup\mathcal{L}_p$, тогда риманова поверхность $\mathfrak{R}\setminus\mathcal{L}$ распадается на два листа $D^{(1)}$ и $D^{(2)}$ (таких, что $\operatorname{proj}(D^{(l)})=D$), то есть $\mathfrak{R}=D^{(1)}\sqcup\mathcal{L}\sqcup D^{(2)}$.

Задача 1 *При фиксированном* $n\in\mathbb{N}$*,* $n\ge g$*, найти функцию* $\Psi_n(\mathbf{z})=\Psi_n(\mathbf{z};\rho)$ *такую, что:*

1°. Ψ_n *(кусочно) мероморфна на* $\mathfrak{R}\setminus\mathcal{L}=D^{(1)}\sqcup D^{(2)}$*;*

2°. *дивизор* $(\Psi_n)=(n-g)\infty^{(2)}+\mathbf{z}_1+\dots+\mathbf{z}_g-n\infty^{(1)}$*;*

3°. *на* $\mathcal{L}$ *выполнено краевое условие:* $\rho(x)\Psi_n^{(1)}(\mathbf{x})=\Psi_n^{(2)}(\mathbf{x})$*,* $\mathbf{x}\in\mathcal{L}$*.*

В п.3° под $\Psi_n^{(1)}(\mathbf{x})$ понимаются некасательные предельные значения функции $\Psi_n(\mathbf{z})$ при $D^{(1)}\ni\mathbf{z}\to\mathbf{x}\in\mathcal{L}$, аналогичный смысл придается и $\Psi_n^{(2)}(\mathbf{x})$. Нормировка пси-функции выбирается так, что $\Psi_n(z^{(1)})\Psi_n(z^{(2)})\equiv\prod_{j=1}^{g}(z-z_j)$ и старший (т.е. при степени z^n) коэффициент функции $\Psi_n(z^{(1)})$ положителен.

Теорема 2. *Пусть* $\Psi_n(\mathbf{z})=\Psi_n(\mathbf{z};\rho_n)$ *– нормированное решение краевой задачи 1 для* $n\ge g$*,* $q_n(z;n)$ *– полином степени* n *с положительным старшим коэффициентом, ортонормированный относительно переменного веса*

$$\sigma_n(x)=\frac{i\rho_n(x)}{2\pi W^+(x)}>0,\quad x\in E,\quad \rho_n(x)=p_g(x)e^{-2nQ(x)}.\tag{8}$$

Тогда справедлива следующая формула сильной асимптотики:

$$q_n(z;n)=\Psi_n(z^{(1)})\bigl(1+o(1)\bigr),\qquad n\to\infty.\tag{9}$$

В теореме 2 асимптотическая формула (9) выполняется равномерно на любом компакте K в $\overline{\mathbb{C}}$, лежащем вне выпуклой оболочки $\operatorname{conv}(E)$ компакта E, с $o(1) = O(\delta^n)$, где $\delta = \delta(K) \in (0,1)$. Под $\Psi_n(z^{(1)})$ понимаются значения пси-функции на первом листе поверхности $\mathfrak{R}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Гончар, Е. А. Рахманов. *О сходимости совместных аппроксимаций Паде для систем функций марковского типа* // Тр. МИАН СССР, 1981, т. 157, сс. 31–48
2. P. Deift, T. Kriecherbauer, K. T.-R. McLaughlin, S. Venakides, X. Zhou. *Uniform asymptotics for polynomials orthogonal with respect to varying exponential weights and applications to universality questions in random matrix theory* // Comm. Pure Appl. Math., 1999, vol. 52:11, pp. 1335–1425
3. A. I. Aptekarev, W. Van Assche. *Scalar and matrix Riemann–Hilbert approach to the strong asymptotics of Pade approximants and complex orthogonal polynomials with varying weight* // J. Approx. Theory, 2004, vol. 129:2 pp. 129–166
4. J. Nuttall. *Padé polynomial asymptotics from a singular integral equation* // Constr. Approx., 1990, vol. 6:2, pp. 157–166
5. С. П. Суетин. *Сравнительная асимптотика решений и формулы следов для некоторого класса разностных уравнений* // Совр. пробл. матем., 2006, т. 6, сс. 3–74

УДК 510.52+517.554+517.953

О КРИТЕРИИ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ ВТОРОМУ КЛАССУ АНАЛИТИЧЕСКОЙ СЛОЖНОСТИ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

ON THE CRITERION OF ANALYTIC COMPLEXITY SECOND CLASS MEMBERSHIP FOR FUNCTIONS OF TWO COMPLEX VARIABLES

В. А. Красиков[1]

Сибирский федеральный университет, Красноярск
vkrasikov@sfu-kras.ru

Одной из классических задач, приводящих к понятию аналитической сложности функции нескольких переменных, является 13-я проблема Гильберта. В ее оригинальной формулировке ставится вопрос о возможности представления решений приведенного алгебраического уравнения 7-й степени в виде композиции непрерывных функций двух переменных. Решение данной проблемы дается теоремой Колмогорова-Арнольда, согласно которой любая непрерывная функция произвольного (конечного) числа переменных, заданная на компактном подмножестве вещественного пространства, может быть представлена в виде композиции непрерывных функций одного переменного и всего лишь одной функции двух переменных, в качестве которой можно взять, например, функцию $f(x, y) = x + y$. Данное представление возможно благодаря широте класса всех непрерывных функций одного переменного. В то же время решение исходного алгебраического уравнения является многозначной аналитической функцией нескольких комплексных переменных и потому встает вопрос о нахождении аналогичного представления в классе аналитических функций двух переменных [1]. Данный вопрос естественным образом приводит к понятию классов сложности аналитических функций двух переменных и задаче нахождения дифференциальных критериев принадлежности функций этим классам [2].

В соответствии с индуктивным определением, предложенным В.К. Белошапкой в [2], росток аналитической функции двух переменных $z = z(x, y)$ лежит во втором классе аналитической сложности, если он допускает локальное представление в виде $z = h(f(x, y) + g(x, y))$, где функции двух переменных f и g лежат в первом классе аналитической сложности, h – аналитическая функция одного переменного. Другими словами, $z(x, y) \in Cl_2$ в том и только том случае, когда она допускает локальное представление в виде

$$z = h(c_1(a_1(x) + b_1(y)) + c_2(a_2(x) + b_2(y))) \tag{1}$$

для некоторых аналитических функций одного переменного h и a_k, b_k, c_k, $k = 1, 2$. В работе формулируется необходимое условие принадлежности аналитической функции двух переменных второму классу аналитической сложности.

[1]Работа выполнена при поддержке аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (2009 - 2011 годы) – проект №2.1.1/14245.

Мы можем без ограничения общности считать, что в достаточно малой окрестности точки общего положения для функций в правой части (1) существуют обратные к ним, также являющиеся аналитическими. Выполняя замену переменных $\xi = a_2(x)$, $\eta = b_2(y)$ и $\zeta = h^{-1}(z)$, обозначая $p(\xi) = a_1(a_2^{-1}(\xi)), q(\eta) = b_1(b_2^{-1}(\eta)), r(t) = c_1(t)$ и заменяя $c_2(t)$ на $s(t)$, мы приходим к соотношению

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta) = r(p(\xi) + q(\eta)) + s(\xi + \eta). \tag{2}$$

Множество функций, допускающих представление (2), существенно ýже второго класса аналитической сложности, но тесно связано с ним через приведенные выше замены переменных. Мы будем обозначать его через $Cl_{\frac{3}{2}}$.

Доказана следующая

Теорема 1. *Для аналитической функции двух переменных $F(x, y)$ определим дифференциальные многочлены*

$$\begin{aligned}
C_1(F(x,y)) &= F_x^2 F_{xyy} F_y - F_x F_{xxy} F_y^2 + F_{xx} F_{xy} F_y^2 - F_x^2 F_{xy} F_{yy}, \\
C_2(F(x,y)) &= -F_x^2 F_{xyy} + 2F_x F_{xxy} F_y - 2F_{xx} F_{xy} F_y - \\
&\quad -2F_x F_{xyy} F_y + F_{xxy} F_y^2 + 2F_x F_{xy} F_{yy}, \\
C_3(F(x,y)) &= F_x^2 Fxy - F_{xx} F_y^2 - F_{xy} F_y^2 + F_x^2 F_{yy}, \\
C_4(F(x,y)) &= -F_x^2 F_y + F_x F_y^2, \\
C_5(F(x,y)) &= -F_x F_{xxy} + F_{xx} F_{xy} + 2F_x F_{xyy} - 2F_{xxy} F_y + F_{xyy} F_y - F_{xy} F_{yy}, \\
C_6(F(x,y)) &= -F_x F_{xy} + F_{xx} F_y + F_{xy} F_y - F_x F_{yy}, \\
C_7(F(x,y)) &= F_x^2 - F_y^2, \\
C_8(F(x,y)) &= F_{xxy} - F_{xyy}, \\
C_9(F(x,y)) &= -F_{xx} + F_{yy}, \\
C_{10}(F(x,y)) &= -F_x + F_y.
\end{aligned}$$

Определим также отображение

$$\mathcal{D} : (f(x,y), g(x,y)) \mapsto f_x g - f g_x + f g_y - f_y g,$$

действующее на паре ростков аналитических функций с общей областью определения, и положим $A_{1k}(F) := C_k(F)$, $k = 1, \ldots, 10$, $A_{j+1,k}(F) := \mathcal{D}(A_{jk}(F), A_{jj}(F))$, $j = 1, \ldots, 9$, $k \geq j + 1$. Если $F(x, y) \in Cl_{\frac{3}{2}}$, то $A_{10,10}(F(x, y)) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Витушкин *13-я проблема Гильберта и смежные вопросы* // УМН. 2004. №59:1(355). С. 11-24.
2. Beloshapka V. K. *Analytic complexity of functions of two variables* // Russian Journal of Mathematical Physics. 2007. №14:3. P. 243-249.

УДК 515.17+517.545

ТЕОРЕМЫ О ВЫЧЕТАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА ЛЮБОГО ПОРЯДКА НА ТОРЕ

RESIDUE THEOREMS FOR PRYM DIFFERENTIALS OF ANY ORDER ON TORUS

Т. С. Крепицина

Кемеровский государственный университет, Кемерово
kcfabira@gmail.com

Теорема о полной сумме вычетов для абелева 1-дифференциала на компактной римановой поверхности играет большую роль в теории функций. Вычеты для дифференциалов Прима можно определять только для ветвей таких многозначных дифференциалов. В данной работе впервые будут доказаны теоремы о полной сумме вычетов для дифференциалов Прима любого порядка на переменном торе с любыми переменными характерами.

Пусть F_0 — компактная риманова поверхность рода $g = 1$, $F_0 = \mathbb{C}/\Gamma$, где Γ — группа с двумя образующими

$$A_1(z) = z + \omega, \quad B_1(z) = z + \omega^{'}, \quad Im\frac{\omega^{'}}{\omega} > 0.$$

Положим $\mu_0 = \frac{\omega^{'}}{\omega}$. Фундаментальная группа для поверхности F_0 имеет алгебраическое представление:

$$\pi_1(F_0) \cong \Gamma =< a_1, b_1 : a_1b_1 = b_1a_1 > .$$

Класс $[F_0, \{a_1, b_1\}]$ конформно эквивалентных отмеченных компактных римановых поверхностей рода 1 единственно определяется одним комплексным параметром (модулем) $\mu_0 = \frac{\omega^{'}}{\omega}$, лежащим в верхней полуплоскости

$$H = \{z \in \mathbb{C} : Imz > 0\}.$$

При этом $F_0 = \mathbb{C}/\Gamma_0$, где Γ_0 — группа с двумя образующими $A_{01}(z) = z + 1$, $B_{01}(z) = z + \mu_0$.

Любой другой класс

$$[F_\mu, \{a_1(\mu), b_1(\mu)\}]$$

конформно эквивалентных отмеченных компактных римановых поверхностей рода 1 также единственно определяется одним комплексным параметром (модулем) $\mu \in H$ и $F_\mu = \mathbb{C}/\Gamma_\mu$, где Γ_μ порождается двумя образующими

$$A_{\mu 1}(z) = z + 1, \quad B_{\mu 1}(z) = z + \mu.$$

Пространство Тейхмюллера $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_1(F_0)$, состоящее из классов

$$[F_\mu, \{a_1(\mu), b_1(\mu)\}]$$

конформно эквивалентных отмеченных компактных римановых поверхностей рода 1, параметризовано точками H и является 1-мерным комплексно аналитическим многообразием.

Теорема 1. *(о полной сумме вычетов для 1−дифференциала Прима). Для любого 1-дифференциала Прима* ω *с любыми характером* ρ *и полярным дивизором* $(\omega)_\infty = P_1^{\alpha_1}...P_m^{\alpha_m}, \alpha_j > 0,\ j = 1,...,m,$ *с попарно различными точками* $P_1,...,P_m, m \geq 2,$ *на переменном торе* F_μ *верно равенство*

$$\sum_{j=1}^{m} res_{P_j}\omega f = 0,$$

где 1) если ρ *- несущественный характер, то* f *- мультипликативная единица для* ρ^{-1}*;*

2) если ρ *— существенный характер, то* f *- единственная, с точностью до умножения на ненулевую константу, мультипликативная функция для* ρ^{-1} *с единственным простым полюсом* P_1 *на* F_μ*.*

Теорема 2. *(о полной сумме вычетов для* (ρ, q)*−дифференциала). Для любого* $(\rho,\ q)$*−дифференциала* τ *с любыми характером* ρ *и полярным дивизором* $(\tau)_\infty = Q_1^{\alpha_1}...Q_s^{\alpha_s}$ *с попарно различными точками* $Q_1,...,Q_s, s \geq 2,$ *и любого целого числа* $q \neq 0, 1$ *на переменном торе* F_μ *верно равенство*

$$\sum_{j=1}^{s} res_{Q_j}\frac{\tau f}{dz^{q-1}} = 0,$$

где 1) если ρ *- существенный характер, то* f *- единственная, с точностью до умножения на ненулевую константу, мультипликативная функция для* ρ^{-1} *с единственным простым полюсом в* Q_1 *на* F_μ*;*

2) если ρ *- несущественный характер, то* f *- мультипликативная единица для* ρ^{-1} *на* F_μ*.*

Из этих теорем, как следствие, получаются законы взаимности для функций и дифференциалов Прима, необходимое и достаточное условие существования дифференциала Прима любого порядка с заданными простыми полюсами и вычетами в них для ветви этого дифференциала, а также теоремы о разложении произвольного мероморфного дифференциала Прима в сумму элементарных и аналог формулы разложения П.Аппеля для мультипликативных функций в сумму элементарных интегралов Прима с любым характером на переменном торе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуешев В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности.* Кемерово:КемГУ, 2003. Ч. 2. 241 с.

УДК 517.55+519.1

ТОЖДЕСТВА С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНО ВЫПУКЛЫХ ПОЛИЭДРАХ

IDENTITIES WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS AND INTEGRAL REPRESENTATIONS IN LINEARLY CONVEX POLYHEDRA

В. П. Кривоколеско[1] Е. К. Лейнартас[2]

Сибирский федеральный университет, Красноярск
uchenii@matematik.ru, analitik@matematik.ru

В работе [2] (В.П. Кривоколеско, А.К. Цих, 2005) доказано интегральное представление функций, голоморфных в ограниченных кусочно регулярных линейно выпуклых полиэдрах $G = \{\, z \in \mathbb{C}^n : g^l(z, \overline{z}) < 0, \quad l = 1, \ldots, N\}$.

Всякая функция $f(z)$, голоморфная в области G и непрерывная на $\overline{G}$, представима в G виде:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} {\sum_{\sharp J = k}}' \sum_{|I|=n-k} \frac{I!}{(2\pi i)^n} \int_{S^J} \frac{f(\zeta) L_I(g^{j_1}, \ldots, g^{j_k})}{\prod\limits_{t=1}^{k} \langle \nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle^{i_t+1}} \cdot \omega_J, \qquad (1)$$

где ${\sum\limits_{\sharp J=k}}'$ означает суммирование по упорядоченным мультииндексам J длины k : $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_k \leqslant N$; $\sum\limits_{|I|=n-k}$ – суммирование по мультииндексам $I = (i_1, \ldots, i_k)$ со свойством $|I| := i_1 + \ldots + i_k = n - k$; L_I – смешанный левиан порядка I и введено обозначение $I! = i_1! \cdot \ldots \cdot i_k!$.

В данном представлении функция выражается через сумму интегралов по граням S^J различных размерностей полиэдра G с ядрами, построенными с помощью кратной геометрической прогрессии. Их разложение в ряды и последующее почленное интегрирование и приводит к тождествам с биномиальными коэффициентами.

Применяя формулу (1)для конкретных областей в [3] (В.П. Кривоколеско, 2009) была получена серия комбинаторных тождеств с биномиальными коэффициентами, одно из которых оказалось особенно интересным в связи с его многочисленными применениями в различных областях математики.

Пусть $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ — точки n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$, подмножество этой решетки, состоящее из точек с целыми неотрицательными координатами, обозначим $\mathbb{Z}^n_+$. Далее обозначим $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$, $z^\beta = z_1^{\beta_1} \cdot \cdots \cdot z_n^{\beta_n}$ и, если $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$, то $\beta! = \beta_1! \cdots \beta_n!$. Полиномиальные коэффициенты определяются для $\beta \in \mathbb{Z}^n_+$ следующей формулой

$$\frac{|\beta|!}{\beta!} = \frac{(\beta_1 + \cdots + \beta_n)!}{\beta_1! \cdots \beta_n!}.$$

Фиксируем $s \in \mathbb{Z}^n_+$ и $\mu \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Для $j = \mu, \mu+1, \ldots, n$ обозначим $B^s_{\mu,j} = \{\beta \in \mathbb{Z}^n_+ : \beta_\mu \le s_\mu, \ldots, \beta_{j-1} \le s_{j-1}, \beta_j = s_j, \beta_{j+1} \le s_{j+1}, \ldots, \beta_n \le s_n\}$.

[1] Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ - 7347.2010

[2] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 11.01-000852 и гранта МО и Науки РФ 134.11

Теорема 1. *Если* $|z_1|+\cdots+|z_{\mu-1}| < 1$ *и* $z_1+z_2+\cdots+z_n = 1$, *то для* $\mu = 1,\ldots,n$ *справедливы следующие тождества*

$$\sum_{j=\mu}^{n} z_j \sum_{\beta\in B^s_{\mu,j}} \frac{|\beta|!}{\beta!} z^\beta \equiv 1. \tag{2}$$

Если $\mu = 1$, то ситуация следующая. Конструирование вейвлетов с компактными носителями [6] (Daubechies wavelets) приводит к необходимости решить функциональное уравнение $(1-z)^N P(z) + z^N P(1-z) \equiv 1, 0 \le z \le 1$ относительно неизвестной функции $P(z)$. Многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий данному уравнению, имеет вид

$$P_N(z) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1+k)!}{(N-1)!k!} z^k,$$

т.е. для $n = 2$, $s_1 = s_2 = N-1$ удовлетворяет тождеству

$$(1-z)^N \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1+k)!}{(N-1)!k!} z^k + z^N \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(N-1+k)!}{(N-1)!k!} (1-z)^k = 1. \tag{3}$$

Цайльбергер Д. (Zeilberger D., [7]) дал вероятностную интерпретацию тождества (3) для $n = 2$ и привел вариант его обобщения на многомерный случай. Относительно теоремы 1 этот вариант означает, что рассмотрен случай $s_1 = s_2 = \cdots = s_n$. Случай же произвольных s_j, т.е. формула (2) для $\mu = 1$ доказан в работе Г.П. Егорычева [1]. Отметим, что наряду с теорией вейвлетов и теорией вероятностей тождество, аналогичное тождеству (3), использовалось в работе [5] при исследовании асимптотических распределений В.К. Иванова.

Отметим, что применение конструкции композиции Адамара (Е.К. Лейнартас , [4]) позволило не только существенно упростить доказательство тождества для $\mu = 1$ в n-мерном случае, но и естественным образом получить тождества для остальных значений μ.

Пусть даны два степенных ряда кратности n и m соответственно:

$$f(\xi) = \sum_{\alpha\ge 0} a(\alpha)\xi^\alpha = \sum_{\alpha\ge 0} a(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\xi_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\xi_n^{\alpha_n}, \tag{4}$$

$$g(\eta) = \sum_{\beta\ge 0} b(\beta)\eta^\beta = \sum_{\beta\ge 0} b(\beta_1,\ldots,\beta_m)\eta_1^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot\eta_m^{\beta_m}, \tag{5}$$

где $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_m)$, а «векторное» неравенство $\alpha \ge 0$ означает, что $\alpha_j \ge 0$, $j = 1,2,\ldots,n$. Пусть, кроме того, дано линейное отображение $D : \mathbb{Z}^m \to \mathbb{Z}^n$ с матрицей, которую мы будем обозначать той же буквой

$$D = \|d_{ij}\|_{m\times n} = \begin{pmatrix} d_{11}\ldots d_{1n} \\ \ldots\ddots\ldots \\ d_{m1}\ldots d_{mn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

где $d_{ij} \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$.

Определим композицию рядов (4) и (5) следующим образом

$$h(z) := \sum_{\beta \geq 0} a(\beta D + s) b(\beta) z^{\beta}. \tag{7}$$

Здесь $s \in \mathbb{Z}^n$ и s фиксировано, а мультииндекс β умножается слева на матрицу (6) обычным образом. Если $m = n = 1, d_{11} = 1, s_1 = 0$, то (7) — классическая адамаровская композиция рядов (см. [8]).

Другой «крайний» случай $\mu = n$ связан с бесконечными последовательностями испытаний Бернулли.

Тождество (2) при $n = 2$ можно записать в виде

$$z_2 \sum_{\beta_1 = 0}^{\infty} \frac{(\beta_1 + s_2)!}{\beta_1! s_2!} z_1^{\beta_1} z_2^{s_2} = 1, \tag{8}$$

которое в отрицательном биномиальном распределении допускает следующую интерпретацию.

Пусть z_1—вероятность успеха, а z_2—вероятность неудачи в схеме Бернулли. Тогда $\frac{(\beta_1+s_2)!}{\beta_1! s_2!} z_1^{\beta_1} z_2^{s_2}$— это вероятность того, что в серии $(\beta_1 + s_2)$ испытаний произойдет β_1 успех и s_2 неудач. Проводим испытания до тех пор, пока не наступит ровно $s_2 + 1$ неудача, тогда левая часть равенства (8) есть вероятность того, что $s_2 + 1$ неудача наступила после конечного числа испытаний.

Для $n = 2$ равенство (2) означает, что возможностью существования бесконечной последовательности испытаний с числом неудач меньшим, чем $(s_2 + 1)$ можно пренебречь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Егорычев Г.П. *Комбинаторное тождество из теории интегральных представлений в $\mathbb{C}^n$*// Известия Иркутского государственного университета, серия «Математика», 2011, Т. 34, №4, 39–44.
2. Кривоколеско В.П., Цих А.К. *Интегральные представления в линейно выпуклых полиэдрах*// Сиб. мат. журн., 2005, Т.46, №3, 579–593.
3. Кривоколеско В.П. *Интегральные представления в линейно выпуклых полиэдрах и некоторые комбинаторные тождества*// Журнал СФУ. Серия «Математика и физика», 2009, 2(2), 176–188.
4. Лейнартас Е.К. *Многомерная композиция Адамара и суммы с линейными ограничениями на индексы суммирования*// Сиб. мат. журн. 1989, Т. 30, №2, 102–107.
5. Шелкович В.М., Южаков А.П. *Структура одного класса асимптотических распределений В. К. Иванова*// Изв. вузов. Матем., 1991, №4, 70—73.
6. Ingrid Daubeacheis *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992.
7. Zielberger D. *On an identity of Daubeachies*// Amer. Math. Monthly 100 (1993), bottom of p. 487.
8. Бибербах Л. *Аналитическое продолжение* М.:Наука, 1967.

УДК 517.55

ФОРМУЛЫ ВАРИНГА ДЛЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

WARING'S FORMULAE FOR SYSTEMS OF ALGEBRAIC EQUATIONS

В. Р. Куликов[1]

Сибирский федеральный университет, Красноярск
v.r.kulikov@mail.ru

Между коэффициентами и степенными суммами корней полинома существует зависимость, которая задается формулами Варинга или рекурентными соотношениями Ньютона. Для систем n алгебраических уравнений с n неизвестными известно обобщение рекурентных формул Ньютона [1]. В настоящей работе приводится обобщение формул Варинга для таких систем уравнений.

Рассмотрим так называемую приведенную систему n алгебраических уравнений от n неизвестных $y = (y_1, \ldots, y_n)$ вида

$$y_i^{m_i} + \sum_{\lambda \in \Lambda^{(i)}} x_\lambda y^\lambda = 0, i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где набор $\Lambda^{(i)} \subset \mathbb{Z}^n_\geqslant$ показателей i-го уравнения состоит из элементов $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ таких, что $|\lambda| := \lambda_1 + \ldots + \lambda_n < m_i$.

Обозначим через Λ дизъюнктную сумму $\bigsqcup \Lambda_i$, и пусть $|\Lambda|$ - число коэффициентов в системе (1). Показатели λ мономов y^λ в системе (1) можно представить как $n \times |\Lambda|$-матрицу

$$\Psi = (\lambda^1, \ldots, \lambda^{|\Lambda|}),$$

где λ^k - это вектор-столбец из Λ.

Кроме того, рассмотрим $n \times |\Lambda|$-матрицу χ, i-я строка которой представляет умноженную на m_i характеристическую функцию подмножества $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda$, то есть элементы этой строки равны m_i на местах $\lambda \in \Lambda^{(i)}$ и 0 на всех остальных местах $\lambda \in \Lambda$. Также введем $|\Lambda| \times n$-матрицу K, i-й столбец которой представляет характеристическую функцию подмножества $\Lambda^{(i)} \subset \Lambda$, умноженную на соответсвующие k_λ, то есть элементы этого столбца равны k_λ на местах $\lambda \in \Lambda^{(i)}$ и 0 на всех остальных местах $\lambda \in \Lambda$.

В пространстве коэффициентов системы обозначим через $x_{(0)}$ точку такую, что все коэффициенты системы, кроме свободных членов равны 0, а свободные члены принимают значение -1. Обозначим через $y = y(x)$ - решение системы (1), его ветвь с условием $y(x_{(0)}) = (1, \ldots, 1)$ будем называть главным решением.

Система (1) имеет $N = m_1 \cdot \ldots \cdot m_n$ решений $y^{(\nu)}(x)$.

Степенной суммой степени $\mu \in \mathbb{Z}^n_\geqslant$ называют выражение $S_\mu = \sum\limits_{\nu=1}^{N} \left(y^{(\nu)}(x)\right)^\mu$.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации (No 1. 34.11).

Теорема 1. *Степенная сумма S_μ корней системы (1) может быть представлена в следующем виде:*

$$S_\mu = \sum_{\substack{k\geqslant 0:\\ (\chi-\Psi)k=\mu}} \frac{(-1)^{|k|}}{k!} \prod_{j=1}^{n} \Gamma\left(\sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} k_\lambda\right) \cdot det\left((\chi-\Psi)K\right) x^k. \qquad (2)$$

Отметим, что выражение (2) заведомо корректно определено в случае, когда положительны все координаты μ_j вектора μ: в этом случае Г-функции вычисляются лишь в положительных значениях $\sum\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} k_\lambda$. Если же некоторые $\mu_j = 0$, то для вычисления суммы S_μ необходимо пользоваться соответствующими аналитическими продолжениями (по переменной k) правой части в (2).

Идея доказательства теоремы следующая:

В пространстве коэффициентов системы обозначим через $x_{(0)}$ такую точку, что все коэффициенты системы, кроме свободных членов, равны 0, а свободные члены принимают значение -1. Обозначим через $y = y(x)$ - решение системы (1). Его ветвь $y_0(x)$ с условием $y_0(x_{(0)}) = (1,\ldots,1)$ называют *главным решением*, для которого существует формула в виде ряда гипергеометрического типа [2].

В некоторой окрестности точки $x_{(0)}$ совокупность решений имеет „решетчатый“ вид, а именно, j-я координата y_j пробегает m_j значений.

Обозначим $\varepsilon_J = (\varepsilon_{j_1},\ldots,\varepsilon_{j_n})$, где $\varepsilon_{j_k} = e^{\frac{2\pi i}{m_k} j_k}$. Все решения системы (1) можно выразить через главное решение следующим образом:

$$y_J(x) = \varepsilon_J y_0\left(\left\{\varepsilon_J^\lambda x_\lambda\right\}\right).$$

Тогда степенная сумма S_μ может быть записана в виде

$$S_\mu = \sum_{J=0}^{m-I} y_J^\mu(x),$$

и покоэффициентным сложением рядов гипергеометрического типа, получаем полиномиальное выражение (2)

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Быков, А. М. Кытманов, М. З. Лазман, *Методы исключения в компьютерной алгебре многочленов.* – Новосибирск.: Наука. Сиб. отд-ние. – 1991. – 233 с.
2. Степаненко В. А., *О решении системы n алгебраических уравнений от n неизвестных с помощью гипергеометрических функций*, *Вестник КрасГУ*, **1**(2003), 35–48.

УДК 517.55

ГРАНИЧНЫЙ ВАРИАНТ ТЕОРЕМЫ ФОРЕЛЛИ

BOUNDARY ANALOG OF FORELLI'S THEOREM

В. И. Кузоватов[1]

Сибирский федеральный университет, Красноярск
kuzovatov@yandex.ru

Данная работа содержит результат, связанный с голоморфным продолжением функций f, заданных на границе ограниченной области $D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 1$, в эту область. Речь пойдет о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ результаты о функциях с одномерным свойством голоморфного продолжения тривиальны. Поэтому наши результаты существенно многомерны.

Первый результат, относящийся к нашей теме, получен М.Л. Аграновским и Р.Е. Вальским в [1], изучившими функции с одномерным свойством голоморфного продолжения в шаре. Доказательство основывалось на свойствах группы автоморфизмов шара.

Стаутом в [2], использовавшим комплексное преобразование Радона, теорема Аграновского и Вальского была перенесена на произвольные ограниченные области с гладкой границей. Альтернативное доказательство теоремы Стаута получено А.М. Кытмановым (см. [3]), применившим интеграл Бохнера – Мартинелли. Идея использования интегральных представлений (Бохнера – Мартинелли, Коши – Фантаппье) оказалась полезной при изучении функций с одномерным свойством голоморфного продолжения.

Пусть D – ограниченная область в $\mathbb{C}^n$, $n > 1$, со связной гладкой границей ∂D класса C^2. Сформулируем результат Е.Л. Стаута [2].

Рассмотрим комплексные прямые вида

$$l = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \ \zeta_j = z_j + b_j t, \ j = 1, \ldots, n, \ t \in \mathbb{C}\}, \tag{1}$$

проходящие через точку $z \in \mathbb{C}^n$ в направлении вектора $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ (направление b определяется с точностью до умножения на комплексное число $\lambda \neq 0$).

По теореме Сарда для почти всех $z \in \mathbb{C}^n$ и почти всех $b \in \mathbb{CP}^{n-1}$ пересечение $l \cap \partial D$ представляет собой набор конечного числа кусочно-гладких кривых (за исключением вырожденного случая, когда $\partial D \cap l = \emptyset$).

Будем говорить, что функция $f \in C(\partial D)$ *обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексной прямой* l ($l \cap \partial D \neq \emptyset$), если существует функция f_l со следующими свойствами:

1) $f_l \in C\left(\overline{D} \cap l\right)$;

[1] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 12-01-00007-а.

2) $f_l = f$ на множестве $\partial D \cap l$;

3) функция f_l голоморфна во внутренних (относительно топологии l) точках множества $\overline{D} \cap l$.

Теорема 1 (Стаут Е.Л. [2]). *Если функция $f \in C(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль комплексных прямых вида (1), то f голоморфно продолжается в D.*

Более узкое семейство комплексных прямых, достаточное для голоморфного продолжения, было рассмотрено М.Л. Аграновским и А.М. Семеновым [4].

Рассмотрим открытое множество $V \subset D$ и семейство $\mathfrak{L}_V$ комплексных прямых, пересекающих это множество.

Теорема 2 (Аграновский М.Л., Семенов А.М. [4]). *Если функция $f \in C(\partial D)$ обладает свойством одномерного голоморфного продолжения вдоль прямых из семейства $\mathfrak{L}_V$ для некоторого открытого множества $V \subset D$, тогда функция f голоморфно продолжается в D.*

В дальнейшем рядом авторов (см., например, работы [5] – [8]) были рассмотрены различные семейства комплексных прямых (например, семейства комплексных прямых, пересекающие росток порождающего многообразия, проходящие через росток комплексной гиперповерхности и др.), достаточные для голоморфного продолжения функций из различных классов. Приведем здесь результат из работы [1], в которой утверждается, что семейство комплексных прямых, проходящих через граничную точку комплексного шара, является достаточным для голоморфного продолжения вещественно – аналитических функций, заданных на границе шара.

Пусть $\mathbb{B}^n$ – шар в $\mathbb{C}^n$, $\partial\mathbb{B}^n$ – сфера, $z_0 \in \partial\mathbb{B}^n$ и C^w обозначает класс вещественно – аналитических функций.

Теорема 3 (Баракко Л. [1]). *Пусть функция $f \in C^w(\partial\mathbb{B}^n)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых, проходящих через точку z_0. Тогда функция f голоморфно продолжается в $\mathbb{B}^n$.*

В работе [9] показано, что семейство комплексных прямых, проходящих через граничную точку ограниченной многомерной строго выпуклой области (с некоторым условием на границу), является достаточным для голоморфного продолжения вещественно – аналитических функций, заданных на границе данной области.

Пусть D – ограниченная строго выпуклая область в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ с вещественно – аналитической границей ∂D, т. е

$$D = \{w \,|\, \rho(w) < 0\},$$

где функция $\rho(w_1, \ldots, w_n)$ является вещественно – аналитической в некоторой окрестности замыкания области $\overline{D}$. При этом

$$grad\,\rho = \left(\frac{\partial\rho}{\partial w_1}, \ldots, \frac{\partial\rho}{\partial w_n}\right) \neq 0$$

на ∂D. Обозначим также через $\mathfrak{L}_{w_0}$ – семейство комплексных прямых, проходящих через точку w_0, $w_0 \in \partial D$.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть функция $f \in C^w(\partial D)$ обладает одномерным свойством голоморфного продолжения вдоль всех комплексных прямых из $\mathfrak{L}_{w_0}$, пересекающих D, тогда функция f голоморфно продолжается в D.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Аграновский М.Л., Вальский Р.Е. *Максимальность инвариантных алгебр функций* // Сиб. матем. журн. 1971. Т. 12, вып. 1. С. 3–12.
2. Stout E. *The boundary values of holomorphic functions of several complex variables* // Duke Math. J. 1977. V. 44. № 1. P. 105–108.
3. Айзенберг Л.А., Южаков А.П. *Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе.* Новосибирск: Наука, 1979.
4. Аграновский М.Л., Семенов А.М. *Граничные аналоги теоремы Гартогса* // Сиб. матем. журн. 1991. Т. 32, вып 1. С. 168–170.
5. Кытманов А.М., Мысливец С.Г. *О семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения* // Мат. заметки. 2008. Т. 83, вып. 4. С. 545–551.
6. Agranovsky M. *Analog of a theorem of Forelli for boundary values of holomorphic functions on the unit ball of* $\mathbb{C}^n$ // Journal d'Analyse Mathématique. 2011. V. 113. № 1. P. 293–304.
7. Baracco L. *Holomorphic extension from the sphere to the ball* // arxiv.org/abs/0911.2560.
8. Кытманов А.М., Мысливец С.Г., Кузоватов В.И. *Семейства комплексных прямых минимальной размерности, достаточные для голоморфного продолжения функций* // Сиб. матем. журн. 2011. Т. 52, вып. 2. С. 326–339.
9. Кузоватов В.И. *О некоторых семействах комплексных прямых, достаточных для голоморфного продолжения функций* // Уфимский матем. журн. 2012. Т. 4, вып. 1. С. 107–121.

УДК 534.11

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ ПЕРЕМЕННОЙ ДЛИНЫ, С УЧЕТОМ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ И ДЕЙСТВИЯ ДЕМПФИРУЮЩИХ СИЛ

TRANSVERSE VIBRATIONS OF THE BEAM OF VARIABLE LENGTH, WITH THE ACCOUNT OF THE FLEXURAL RIGIDITY AND THE ACTIONS OF DAMPING FORCES

В. Л. Литвинов

Самарский государственный технический университет, филиал в г.Сызрани, Сызрань
vladlitvinov@rambler.ru

Рассмотрим явление установившегося резонанса и явление прохождения через резонанс для поперечных колебаний балки переменной длины с учетом влияния изгибной жесткости и демпфирующих сил.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания балки, имеет вид:

$$U_{tt}(x,t)+\frac{\lambda}{\rho}U_t(x,t)+\frac{EI}{\rho}U_{xxxx}(x,t)=0. \tag{1}$$

Граничные условия:

$$U(0,t)=0; U_x(0,t)=0; \tag{2}$$

$$U(l_0(t),t)=B\cos W_0(\omega_0 t); U_x(l_0(t),t)=0. \tag{3}$$

Начальные условия не оказывают влияние на резонансные свойства линейных систем, поэтому в данной задаче они не рассматриваются [1].

В (1)-(3) используются следующие обозначения: $U(x,t)$ — поперечное смещение точки балки с координатой x в момент времени t; E — модуль упругости материала балки; I — осевой момент инерции сечения балки; λ — сила сопротивления среды, действующая на единицу длины балки при единичной скорости поперечного движения; ρ — линейная плотность массы балки; $l_0(t)=L_0-v_0t$ — закон движения правой границы; L_0 — начальная длина балки; $W_0(z)$ — функция класса C^1; B,ω_0 — постоянные величины (в случае действия гармонического возмущения ω_0 является частотой этого возмущения).

Если ввести в задачу (1)-(3) безразмерные переменные:

$$\xi=\frac{x}{L_0};\quad \tau=\omega_0\left(t-\frac{L_0}{v_0}\right);\quad U(x,t)=Bu(\xi,\tau)$$

и новую функцию

$$u(\xi,\tau)=\mathrm{e}^{-\alpha\tau}V(\xi,\tau),$$

где $\alpha=\frac{\lambda}{2\omega_0\rho}$, то исходная задача примет вид:

$$\beta^2 V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi,\tau) + V_{\tau\tau}(\xi,\tau) - \alpha^2 V(\xi,\tau) = 0; \tag{4}$$

$$V(0,\tau) = 0; \quad V_\xi(0,\tau) = 0; \tag{5}$$

$$V(l(\varepsilon\tau),\tau) = \mathrm{e}^{\alpha\tau}\cos W(\tau); \quad V_\xi(l(\varepsilon\tau),\tau) = 0, \tag{6}$$

где $\beta^2 = \frac{EI}{\rho}\frac{1}{L_0^4\omega_0^2}$, $l(\varepsilon\tau) = \varepsilon\tau$, $W(\tau) = W_0\left(\tau - \frac{1}{\varepsilon}\right)$, $\varepsilon = -\frac{v_0}{L_0\omega_0}$.

Для решения задачи (4)-(6) воспользуемся методом Канторовича—Галеркина [2].

Следуя данной методике, получим формулу амплитуды колебаний, соответствующих n-ой динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau)\left\{\left[\int_0^\tau F_n(\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\},$$

где

$$E_n^2(\tau) = 0,64\frac{\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}}{l(\varepsilon\tau)\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Omega_{0n}(\varepsilon\tau) = \sqrt{\frac{\beta^2 k_n^4}{l^4(\varepsilon\tau)} - \alpha^2}; \quad k_n = \pi n + \frac{\pi}{2};$$

$$\Phi_n(\zeta) = \int_0^\tau \Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)d\zeta - W(\zeta); \quad F_n(\zeta) = \frac{-2(-1)^n\beta^2 k_n^3\mathrm{e}^{\alpha\zeta}}{\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)l^7(\varepsilon\zeta)}}.$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если скорость изменения функции $\Phi_n(\zeta)$ равна нулю, т.е.:

$$W(\tau) = w_n(\tau) + \gamma,$$

где γ — постоянная величина.

Возрастание амплитуды при этом описывается следующим выражением:

$$A_n(\tau) = 1,6\frac{\beta^2 k_n^3\mathrm{e}^{-\alpha\tau}}{\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)}}\int_0^\tau \frac{\mathrm{e}^{\alpha\zeta}}{\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)l^7(\varepsilon\zeta)}}d\zeta.$$

Исследуем поведение системы под действием гармонической нагрузки, когда $W(\tau) = \tau$, что в начальной постановке соответствует действию возмущающей силы с частотой ω_0. В этом случае на интервале, содержащем точку τ_0, будет наблюдаться явление прохождения через резонанс. Формула для максимально возможной амплитуды здесь имеет вид

$$A_n^2(\tau_1,\tau_2) = E_n^2(\tau_2)\left\{\left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta)\cos\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta)\sin\Phi_n(\zeta)d\zeta\right]^2\right\}.$$

Прохождение через резонанс начинается не доходя до точки τ_0 ($\tau_1 < \tau_0$) и заканчивается за этой точкой ($\tau_2 > \tau_0$). Сама точка τ_0 определяется по формуле:

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon}\frac{k_n\sqrt{\beta}}{\sqrt[4]{1+\alpha^2}}.$$

В заключении отметим, что приведенные здесь результаты позволяют произвести количественный анализ установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс для систем, колебания в которых описывает задача (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. *Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами*: монография. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2009. 131 с.
2. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. *Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича—Галеркина* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2009. №1(18).

УДК 517.55

ВЫЧИСЛЕНИЯ СТЕПЕННЫХ СУММ КОРНЕЙ СИСТЕМ НЕАЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ОПРЕДЕЛЕННОГО ВИДА

EVALUATION OF THE POWER SUMS OF ROOTS FOR SYSTEMS OF NON-ALGEBRAIC EQUATIONS OF CERTAIN FORM

Е. К. Мышкина[1]

Сибирский федеральный университет, Красноярск
elfifenok@mail.ru

Рассмотрим систему функций $f_1(z),\ f_2(z),\dots,f_n(z)$, голоморфных в окрестности точки $0\in\mathbb{C}^n$, $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)$, и имеющих следующий вид

$$f_j(z)=(z^{\beta^j}+Q_j(z))e^{P_j(z)},\quad j=1,2,\dots,n, \tag{1}$$

где $\beta^j=(\beta^j_1,\beta^j_2,\dots,\beta^j_n)$ — мультииндекс с целыми неотрицательными координатами, $z^{\beta^j}=z_1^{\beta^j_1}\cdot z_2^{\beta^j_2}\cdots z_n^{\beta^j_n}$; $\|\beta^j\|=\beta^j_1+\beta^j_2+\ldots+\beta^j_n=k_j,$; $j=1,2,\dots,n$.

Функции Q_j, P_j разлагаются в окрестности нуля в ряд Тейлора, сходящийся абсолютно и равномерно, вида

$$Q_j(z)=\sum_{\|\alpha\|>k_j}a^j_\alpha z^\alpha, \tag{2}$$

$$P_j(z)=\sum_{\|\gamma\|\geqslant 0}b^j_\gamma z^\gamma, \tag{3}$$

где $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)$, $\alpha_j\geqslant 0$, $\alpha_j\in\mathbb{Z}$, а $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdot z_2^{\alpha_2}\cdots z_n^{\alpha_n}$; $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n)$, $\gamma_j\geqslant 0$, $\gamma_j\in\mathbb{Z}$, а $z^\gamma=z_1^{\gamma_1}\cdot z_2^{\gamma_2}\cdots z_n^{\gamma_n}$.

Рассмотрим циклы $\gamma(r)=\gamma(r_1,r_2,\dots,r_n)$, являющиеся остовами поликругов:

$$\gamma(r)=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_s|=r_s, s=1,2,\dots,n\},\quad r_1>0,\dots,r_n>0.$$

При достаточно малых r_j циклы $\gamma(r)$ лежат в области голоморфности функций f_j и $f_j(z)\neq 0$ на $\gamma(r)$, $j=1,2,\dots,n$.

Обозначим

$$J_\beta=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma(r)}\frac{1}{z^{\beta+I}}\cdot\frac{df}{f}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\gamma(r_1,r_2,\dots,r_n)}\frac{1}{z_1^{\beta_1+1}\cdot z_2^{\beta_2+1}\cdots z_n^{\beta_n+1}}\cdot\frac{df_1}{f_1}\wedge\frac{df_2}{f_2}\wedge\ldots\wedge\frac{df_n}{f_n}$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-00007-а

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\begin{cases} f_1(z) = 0, \\ f_2(z) = 0, \\ \ldots\ldots \\ f_n(z) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. *При сделанных предположениях для функции f_j вида (1), (2), (3) справедливы формулы:*

$$J_\beta = \sum_J \sum_{\|\alpha^s\| \leqslant \|\beta\| + \min(n, k_{i_1} + \ldots + k_{i_s})} \mathfrak{M}\left[\frac{(-1)^{\|\alpha^s\|}\Delta_J \cdot Q^{\alpha^s}_{(J)}}{z^{\beta+(\alpha^s_1+1)\beta^{i_1}+\ldots+(\alpha^s_s+1)\beta^{i_s}}}\right],$$

где $l_s = \|\beta+(\alpha^s_1+1)\beta^{i_1}+\ldots+(\alpha^s_s+1)\beta^{i_s}\|$; $\beta! = \beta_1!\cdot\beta_2!\cdots\beta_n!$; $Q^{\alpha^s}_{(J)} = Q^{\alpha^s_1}_{j_1}\cdot Q^{\alpha^s_2}_{j_2}\cdots Q^{\alpha^s_s}_{j_s}$; $\dfrac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial z^\beta} = \dfrac{\partial^{\|\beta\|}}{\partial z_1^{\beta_1}\partial z_2^{\beta_2}\cdots\partial z_n^{\beta_n}}$; J — мультииндекс длины n, состоящий из s единиц и $(n-s)$ нулей; Δ_J — якобиан системы функций, у которых единицы стоящие на j-ом месте в J соответствует строка $d\widetilde{f}_j$, а нулю стоящему на j-ом месте в J соответствует строка dP_j, $j = 1, \ldots, n$, и, наконец, $\mathfrak{M}$ — линейный функционал, сопоставляющий ряду Лорана его свободный член.

Теперь возьмем в качестве функций Q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ многочлены вида

$$Q_j(z) = \sum_{\alpha \in M_j} a^j_\alpha z^\alpha, \tag{5}$$

где M_j — конечное множество мультииндексов такое, что при $\alpha \in M_j$ координаты $\alpha_k \leqslant \beta^j_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,\ k \neq j$. (Но по прежнему предполагается, что $\|\alpha\| > k_j$ для всех $\alpha \in M_j$).

А в качестве P_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ многочлены вида

$$P_j(z) = \sum_{0 \leqslant \|\gamma\| \leqslant p_j} b^j_\gamma z^\gamma. \tag{6}$$

Обозначим

$$\sigma_{\beta+I} = \sigma_{(\beta_1+1, \beta_2+1, \ldots, \beta_n+1)} = \sum_{k=1}^{M} \frac{1}{z^{\beta_1+1}_{1(k)} \cdot z^{\beta_2+1}_{2(k)} \cdots z^{\beta_n+1}_{n(k)}},$$

где M - число корней системы (4) (с учетом их кратности), не лежащих на координатных плоскостях. Данное выражение является степенной суммой корней, не лежащих на координатных плоскостях, но в отрицательной степени (либо степенной суммой от обратных величин корней).

Теорема 2. *Для системы с многочленами f_j вида (1) и многочленами Q_j вида (5) и P_j вида (6) справедливы формулы $J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}$, если выполняется $\beta \geqslant l^1 + \ldots + l^n$, где $l^j = (l^j_1, \ldots, l^j_n)$ и l^j_i - наивысшая степень i-ого многочлена P_i по j-ой переменной z_j; $i, j = 1, \ldots, n$ (мультииндекс $\alpha \leqslant \beta$, если данное неравенство выполняется для всех координат).*

Рассмотрим более общую ситуацию. Пусть функции f_j имеют вид

$$f_j(z) = \frac{f_j^{(1)}(z)}{f_j^{(2)}(z)}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{7}$$

где $f_j^{(1)}(z)$ и $f_j^{(2)}(z)$ — целые функции в $\mathbb{C}^n$ конечного порядка роста, разлагающиеся в бесконечные произведения (равномерно сходящиеся в $\mathbb{C}^n$)

$$f_j^{(1)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j_s}^{(1)}(z), \quad f_j^{(2)}(z) = \prod_{s=1}^{\infty} f_{j_s}^{(2)}(z),$$

причем каждый из сомножителей имеет форму $(z^{\beta^{j_s}} + Q_{j_s}(z))e^{P_{j_s}(z)}$, а $Q_{j_s}(z)$, $P_{j_s}(z)$ — функции вида (5), (6) и степени всех многочленов, входящих в систему, $\deg P_{j_s} \le \rho$, $j = 1, 2, \ldots, n.$, $s = 1, 2, \ldots, \infty$.

Определим мультииндекс $l^j = (l^j_1, \ldots, l^j_n)$, где l^j_i - максимальная из наивысших степеней всех многочлена P_i по j-ой переменной z_j; $i, j = 1, \ldots, n$, входящих в разложение.

Для каждого набора индексов $j_1, \ldots, j_n$, где $j_1, \ldots, j_n \in \mathbb{N}$, и каждого набора чисел $i_1, \ldots, i_n$, где $i_1, \ldots, i_n$ равны 1 или 2, системы нелинейных алгебраических уравнений

$$f_{1j_1}^{(i_1)}(z) = 0, \quad f_{2j_2}^{(i_2)}(z) = 0, \ \ldots, \ f_{nj_n}^{(i_n)}(z) = 0, \tag{8}$$

имеют конечное число корней, не лежащих на координатных плоскостях.

Корни всех таких систем (не лежащие на координатных плоскостях) составляют не более, чем счетное множество. Перенумеруем их (с учетом кратностей): $z_{(1)}, \ z_{(2)}, \ldots, z_{(l)}, \ldots$.

Обозначим через $\sigma_{\beta+I}$ выражение

$$\sigma_{\beta+I} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l}{z_{1(l)}^{\beta_1+1} \cdot z_{2(l)}^{\beta_2+1} \cdots z_{n(l)}^{\beta_n+1}}.$$

Здесь $\beta_1, \ldots, \beta_n$, как и прежде, неотрицательные целые числа, а знак ε_l равен $+1$, если в систему вида (8), корнем которой является $z_{(l)}$, входит четное число функций $f_{j_s}^{(2)}$; и равен -1, если в систему вида (8), корнем которой является $z_{(l)}$, входит нечетное число функций $f_{j_s}^{(2)}$.

Теорема 3. *Для системы (4) с функциями вида (8), для которых в разложении степени всех P_j ограничены числом ρ и выполняется неравенство $\beta \geqslant l^1 + \ldots + l^n$, тогда для $\sigma_{\beta+I}$ - сходится и справедливы формулы*

$$J_\beta = (-1)^n \sigma_{\beta+I}.$$

УДК 517.55+517.96

МНОГОМЕРНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПРОИЗВОЛЬНОМ КОНУСЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКИ

MULTIDIMENSIONAL DIFFERENCE EQUATIONS IN AN ARBITRARY LATTICE CONE

Т. И. Некрасова

Сибирский федеральный университет, Красноярск
tinkler-9@ya.ru

Пусть $\mathbb{Z}-$ множество целых чисел, а $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}-$ n-мерная целочисленная решетка.

Определение 1. *Конусом K в $\mathbb{Z}^n$ будем называть линейные комбинации из s векторов $a^1, \ldots, a^s \in \mathbb{Z}^n$ вида $K = \{x : x = \lambda_1 a^1 + \ldots + \lambda_s a^s,\ \lambda_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \ldots, s\}$, где $\mathbb{Z}_+-$ целые неотрицательные числа.*

Будем рассматривать *симплициальные конусы*, то есть такие, в которых каждый элемент выражается через образующие *единственным* образом. В частности, это означает, что векторы $a^1, \ldots, a^s$ линейно независимы и их число $s \leq n$. Заметим, что симплициальный конус является заостренным, т. е. из того, что $x \in K$ и $-x \in K$, следует, что $x = 0$.

Обозначим $A = \{\alpha\} \subset K$ — некоторое фиксированое конечное множество точек n-мерной целочисленной решетки. Очевидно, что вместе с каждой точкой $x \in K$, конусу принадлежат и все точки $x + \alpha,\ \alpha \in A$.

Рассмотрим разностное уравнение вида

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = 0,\ x \in K, \tag{1}$$

где $c_\alpha-$коэффициенты (постоянные) уравнения.

Определение 2. *Определим отношение частичного порядка $\geq_K$ между точками m и $\alpha \in \mathbb{Z}^n$. А именно, будем писать $m \geq_K \alpha$, если $m + K \subset \alpha + K$.*

И, кроме того, обозначим $m \not\geq_K \alpha$, если $m \in K \backslash \{K + \alpha\}$, т. е. отношение $m \geq_K \alpha$ не выполняется.

Зафиксируем $m \in N_p \cap \mathbb{Z}^n$ и обозначим $K_m = \{x \in K : x \not\geq_K m\}$.

Сформулируем задачу. *Найти решение уравнения* (1)*, совпадающее на K_m с заданной функцией φ*:

$$f(x) = \varphi(x),\ x \in K_m. \tag{2}$$

Задача Коши для многомерных разностных уравнений рассматривалась в работе [1] в связи с применением в комбинаторном анализе. В этой работе, в частности, приведены условия, обеспечивающие существование и единственность решения задачи Коши.

В работе [2] эти условия сформулированы с использованием понятия многогранника Ньютона, кроме того, приведена формула, выражающая решение задачи Коши через фундаментальное решение разностного оператора.

Для формулировки теоремы о разрешимости задачи (1)–(2) и формулы для ее решения нам потребуются некоторые понятия и результаты теории амеб алгебраических гиперповерхностей (см. [3]).

Определение 3. *Характеристическим многочленом для разностного уравнения* (1) *назовем многочлен Лорана* $\sum_{\alpha\in A} c_\alpha z^\alpha =: P(z)$, *где* $z^\alpha = z_1^{\alpha_1}\dots z_n^{\alpha_n}$, $z = (z_1,\dots,z_n)\in\mathbb{C}^n$, *а* $\mathbb{C}^n-$ n*-мерное комплексное пространство.*

Определение 4. *Многогранником Ньютона* N_p *многочлена* P *называется выпуклая оболочка в* $\mathbb{R}^n$ *элементов множества* A.

Определение 5. *Амебой алгебраической поверхности называется образ множества нулей* V *многочлена* $P(z)$ *при отображении*

$$Log\,:\,z=(z_1,\dots,z_n)\to(\log(|z_1|),\dots,\log(|z_n|))=Log|z|.$$

Если $m-$ вершина многогранника Ньютона N_P многочлена Лорана $P(z)$, то обозначим соответствующую непустую связную компоненту дополнения амебы $\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{A}_P$ через E_m.

Определение 6. *Двойственный конус* C_m *к вершине* m *многогранника* N_P *определяется следущим образом*

$$C_m=\{s\in\mathbb{R}^n:\max_{x\in N_P}\langle s,x\rangle=\langle s,m\rangle\}.$$

Отметим, что он является асимптотическим, т. е. вместе с каждой точкой $u\in E_m$ этой компоненте принадлежит и сдвиг асимптотического конуса $u+C_m\subset E_m$. Кроме того, отметим, что в области $Log^{-1}E_m\subset\mathbb{C}^n$ функция $1/P(z)$ разлагается в ряд Лорана вида

$$1/P(z)=\sum_{x\in\Lambda_m+m}\mathcal{P}_m(x)/z^x, \tag{3}$$

где Λ_m- конус, построенный на векторах $m-\alpha,\ \alpha\in A$, а $\mathcal{P}_m(x)-$ фундаментальное решение разностного уравнения, соответствующее вершине m многогранника N_P.

Определение 7. *Заметим, что фундаментальным называется всякое решение* $\mathcal{P}(x)$ *разностного уравнения такое, что*

$$\sum_{\alpha\in A}c_\alpha\mathcal{P}(x+\alpha)=\delta_0(x),\ x\in\mathbb{Z}^n, \tag{4}$$

где

$$\delta_0(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\neq 0,\\ 1, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Коэффициенты $\mathcal{P}_m(x)$ разложения (3) можно получить следующим образом:

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{c_m z^m + \sum_{\alpha\neq m} c_\alpha z^\alpha} = \frac{1}{c_m z^m(1 - \sum_{\alpha\neq m} \tilde{c}_\alpha z^{\alpha-m})} =$$

$$= \frac{1}{c_m z^m} \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{\alpha\neq m} \tilde{c}_\alpha z^{\alpha-m})^k = \sum_{x\in\Lambda_m+m} \frac{\mathcal{P}_m(x)}{z^x}.$$

Продолжим функцию φ, задающую начальные данные задачи Коши на множестве K_m на $\mathbb{Z}^n \backslash K_m$ нулем, а именно, положим

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in K_m, \\ 0, & \text{если } x \notin K_m. \end{cases}$$

и, затем, определим функцию μ следующим образом:

$$\mu(x) = \sum_{\alpha\in A} c_\alpha \tilde{\varphi}(x+\alpha),\ x \in \mathbb{Z}^n.$$

Пусть $S = \{x \in \mathbb{Z}^n : \exists \alpha \in A$ такое, что $x + \alpha \in K_m\}$, а $S_K = S \cap K$ и $\hat{S}_K = S \setminus S_K$.

Далее определим функцию

$$\tilde{\mu}(x) = \begin{cases} \mu(x), x \in \hat{S}_K, \\ 0, \quad x \notin \hat{S}_K, \end{cases}$$

и обозначим $Supp\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{Z}^n : \mathcal{P}(x) \neq 0\}$– носитель функции $\mathcal{P}$. Нетрудно убедиться, что $Supp\mathcal{P}_m \subset \Lambda_m$. Сформулируем основной результат, обобщающий соответствующее утверждение из [2].

Теорема 1. *Пусть K– симплициальный конус и m– вершина многогранника Ньютона N_p, удовлетворяющая условию $m \geq_K \alpha,\ \alpha \in A$. Тогда задача Коши* (1) — (2) *имеет единственное решение, которое можно найти по формуле*

$$f(x) = \sum_{y\in\hat{S}_K} \tilde{\mu}(y)\mathcal{P}_m(x-y), \tag{5}$$

в правой части которой число слагаемых конечно.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bousquet-Mélou M., Petkovšek M. *Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case* // Discrete Mathematics. 2000. V. 225. P. 51–75.
2. Лейнартас Е. К. *Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений* // Сибирский математический журнал. 2007. Т. 48, №2. С. 335—340.
3. Forsberg M., Passare M., Tsikh A. *Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas* // Advances in Math. 2000. V. 151. P. 45–70.

УДК 539.3

ЗАДАЧА ДЛЯ СОСТАВНОЙ ПЛАСТИНЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ УПРУГИМ СТРИНГЕРОМ

A PROBLEM FOR A COMPOUND PLATE WITH AN INFINITE ELASTIC STRINGER

Г. В. Оганисян

Ереванский Государственный Университет, Ереван
HovhannisyanHamlet@yandex.ru

В работе рассматривается контактная задача для упругого сплошного изотропного листа в виде тонкой однородной составной (кусочно-однородной) бесконечной пластины малой постоянной толщины h, состоящей из двух сцепленных между собой вдоль общей прямолинейной границы полубесконечных пластин с различными упругими свойствами, на линии $y = a$ $(a > 0)$ своей верхней поверхности усиленной упругим кусочно-однородным бесконечным стрингером с достаточно малым постоянным прямоугольным поперечным сечением. Предполагается, что стрингер непрерывно приклеен по всей своей длине и ширине к верхней полубесконечной пластине, параллелен линии разнородности указанных полубесконечных пластин, имеет отличные от них упругие свойства, а контакт между ними осуществляется через тонкий слой клея с достаточно малой постоянной толщиной h_k, малой шириной d_k и модулем сдвига G_k. Задача заключается в определении закона распределения интенсивности тангенциальных контактных усилий, действующих вдоль линии крепления бесконечного стрингера с составной пластиной, когда контактирующая тройка (пластина-клей-стрингер) деформируется сонаправленными и сосредоточенными силами

$$P\delta(x-b)\delta(y-a)\ (b>0) \text{ и } Q\delta(x+c)\delta(y-a)\ (c>0)$$

приложенными на стрингер, и равномерно распределенными горизонтальными растягивающими напряжениями постоянной интенсивности σ_0, действующими на бесконечности составной пластины. Ось абсцисс совпадает с линией раздела полубесконечных пластин. В исследуемой контактной задаче относительно стрингера принимается модель одноосного напряженного состояния в сочетании с моделью контакта по линии, то есть считается, что тангенциальные контактные усилия сосредоточены вдоль средней линии контактного участка [1,2], для составной пластины предполагается, что она находится в условиях обобщенного плоского напряженного состояния, благодаря чему она деформируется как плоскость, а для слоя клея принимается, что во время деформации каждый дифференциальный элемент находится в состоянии чистого сдвига [3]. Тогда, дифференциальное уравнение равновесия элемента упругого кусочно-однородного бесконечного стрингера записанное в обобщенных функциях будет иметь следующий вид:

$$U_s(x;a) = -\frac{1}{E_s^{(1)}F_s^{(1)}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(s-x)\tau_+^{(1)}(s)ds - \frac{1}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(s-x)\tau_-^{(2)}(s)ds +$$

$$+\frac{P\theta(b-x)}{E_s^{(1)}F_s^{(1)}} + \frac{Q\theta(-c-x)}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}} - \frac{X_0\theta(-x)}{E_s^{(1)}F_s^{(1)}} + \frac{X_0\theta(-x)}{E_s^{(2)}F_s^{(2)}} + \frac{\sigma_0}{E} \qquad (-\infty < x < \infty). \quad (1)$$

С другой стороны, для горизонтальной деформации верхней полубесконечной пластины, когда на линии $y = a$ действуют тангенциальные контактные усилия с интенсивностью $\tau(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, а на бесконечности равномерно распределенные горизонтальные растягивающие напряжения постоянной интенсивности σ_0, будем иметь:

$$\frac{8\mu h}{3-\nu}U(x;a) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{s-x} - \frac{d_1(s-x)}{(s-x)^2+4a^2} + \frac{8d_2a^2(s-x)}{\left[(s-x)^2+4a^2\right]^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{2d_3a^2(s-x)\left[(s-x)^2-12a^2\right]}{\left[(s-x)^2+4a^2\right]^3}\right]\tau(s)ds + \frac{hl}{E}\sigma_0 \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad (2)$$

Здесь в формулах (1) и (2) были использованы следующие обозначения:

$$U_s(x;a) = \theta(x)\frac{du_s^{(1)}(x;a)}{dx} + \theta(-x)\frac{du_s^{(2)}(x;a)}{dx};$$
$$U(x;a) = \theta(x)\frac{du^{(1)}(x;a)}{dx} + \theta(-x)\frac{du^{(2)}(x;a)}{dx},$$
$$\tau_+^{(1)}(x) = \theta(x)\tau^{(1)}(x); \tau_-^{(2)}(x) = \theta(-x)\tau^{(2)}(x);$$
$$\tau_+^{(1)}(x) + \tau_-^{(2)}(x) = \tau(x) \qquad (-\infty < x < \infty),$$

$(E_s^{(1)}; F_s^{(1)})$ и $(E_s^{(2)}; F_s^{(2)})$– модули упругости и площади поперечных сечений полубесконечных стрингеров; функции $d_n = d_n(\mu_1\mu^{-1};\nu;\nu_1)$ $(n = 1,2,3)$ характеризуют упругие свойства составной пластины, причем $(E;\mu;\nu)$ и $(E_1;\mu_1;\nu_1)$– модули упругости, модули сдвига и коэффициенты Пуассона верхней и нижней полубесконечных пластин; X_0– неизвестная продольная сила, возникающая в сечении стрингера $x = 0$ и определяющаяся из условий равновесия стрингеров; $\theta(x)$ и $\delta(x)$–функции Хевисайда и Дирака. Теперь имея ввиду, что слой клея находится в условиях чистого сдвига, будем иметь: $U_s(x;a) - U(x;a) =$

$$= \frac{h_k}{G_kd_k}\frac{d\tau(x)}{dx};\ \tau(x) = d_k\tau(x;a) = d_kG_k\gamma_k(x;a) \qquad (-\infty < x < \infty). \qquad (3)$$

Применив к (1), (2) и (3) обобщенное действительное интегральное преобразование Фурье и сопоставив полученные результаты относительно трансформантов Фурье функций неизвестных тангенциальных контактных усилий с интенсивностями

$\tau_+^{(1)}(x)$ и $\tau_-^{(2)}(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, окончательно получим следующее функциональное уравнение:

$$\overline{H}(\sigma)\overline{\tau}_+^{(1)}(\sigma) + \overline{\tau}_-^{(2)}(\sigma) = \overline{f}(\sigma) \qquad (-\infty < \sigma < \infty). \tag{4}$$

Здесь ядро $\overline{H}(\sigma)$ и свободный член $\overline{f}(\sigma)$ определяются следующим образом:

$$\overline{H}(\sigma) = \frac{\lambda_1 + |\sigma| + \alpha\sigma^2 + B(|\sigma|)}{\lambda_2 + |\sigma| + \alpha\sigma^2 + B(|\sigma|)}; \alpha = \frac{8\mu h h_k}{(3-\nu)G_k d_k};$$
$$\lambda_n = \frac{8\mu h}{(3-\nu)E_s^{(n)}F_s^{(n)}}(n=1,2), \overline{f}(\sigma) = \frac{\lambda_1 P e^{i\sigma b} + \lambda_2 Q e^{-i\sigma c} + (\lambda_2 - \lambda_1)X_0}{\lambda_2 + |\sigma| + \alpha\sigma^2 + B(|\sigma|)};$$
$$B(|\sigma|) = (-d_1|\sigma| + 2d_2 a\sigma^2 - d_3 a^2|\sigma|^3)e^{-2a|\sigma|}. \tag{5}$$

Условие равновесия упругого кусочно-однородного бесконечного стрингера имеет вид:

$$\overline{\tau}(0) = P + Q + P_0 - Q_0, \tag{6}$$

где P_0 и Q_0– те силы, которые возникают в стрингере при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.

Функциональное уравнение (4) при условии (6) можно решить рассматривая его как краевую задачу Римана в теории аналитических функций, поскольку функции $\overline{\tau}_+^{(1)}(\sigma)$ и $\overline{\tau}_-^{(2)}(\sigma)$ являются граничными значениями аналитических функций $\overline{\tau}_+^{(1)}(\alpha)$ и $\overline{\tau}_-^{(2)}(\alpha)$ $(\alpha = \sigma + i\tau)$, регулярных соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, или если применить метод Винера-Хопфа. Однако здесь, решение уравнения (4) строится методом, изложенным в [2,4]. Поскольку $\tau(x)$ суммируемая функция на всей действительной оси, то $\overline{\tau}_+^{(1)}(\sigma)$ и $\overline{\tau}_-^{(2)}(\sigma)$ стремятся к нулю при $|\sigma| \to \infty$. Далее, легко видеть, что $\overline{H}(\sigma) \to 1$ при $|\sigma| \to \infty$, тогда ядро $\overline{H}(\sigma)$ можно представить в виде отношения:

$$\overline{H}(\sigma) = \frac{1 + \overline{K}_+(\sigma)}{1 + \overline{K}_-(\sigma)} \qquad (-\infty < \sigma < \infty), \tag{7}$$

где $\overline{K}_\pm(\sigma)$– граничные значения аналитических функций $\overline{K}_\pm(\alpha)$, регулярных и не имеющих нулей в верхней $Im\alpha > 0$ и нижней $Im\alpha < 0$ полуплоскостях, причем:

$$\overline{K}_\pm(\sigma) = \exp\{\pm\overline{F}_\pm(\sigma)\} - 1; \ln\overline{H}(\sigma) = \overline{F}_+(\sigma) + \overline{F}_-(\sigma);\ F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\ln\overline{H}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma,$$
$$\overline{F}_+(\sigma) = \int_0^\infty F(x)e^{i(\sigma+i0)x}dx =$$
$$\ln\sqrt{\overline{H}(\sigma)} + \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\sqrt{\overline{H}(s)}ds}{s-\sigma};\ \overline{F}_-(\sigma) = \overline{F}_+(-\sigma). \tag{8}$$

Тогда, имея ввиду отношение (7), функциональное уравнение (4) запишется в виде:

$$[1 + \overline{K}_+(\sigma)]\overline{\tau}_+^{(1)}(\sigma) + [1 + \overline{K}_-(\sigma)]\overline{\tau}_-^{(2)}(\sigma) = \overline{f}(\sigma)[1 + \overline{K}_-(\sigma)] \qquad (-\infty < \sigma < \infty). \tag{9}$$

С другой стороны, поскольку

$$\overline{f}(\sigma)[1 + \overline{K}_-(\sigma)] \equiv \overline{\varphi}(\sigma) = \overline{\varphi}_+(\sigma) + \overline{\varphi}_-(\sigma) \qquad (-\infty < \sigma < \infty), \tag{10}$$

$$\overline{\varphi}_+(\sigma)=\int_0^\infty \varphi(x)e^{i(\sigma+i0)x}dx;\ \overline{\varphi}_-(\sigma)=\int_{-\infty}^0 \varphi(x)e^{i(\sigma-i0)x}dx;\ \varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \overline{\varphi}(\sigma)e^{-i\sigma x}d\sigma,$$

то равенство (9) уже можно представить следующим образом:

$$\overline{L}_+^{(1)}(\sigma)\equiv[1+\overline{K}_+(\sigma)]\overline{\tau}_+^{(1)}(\sigma)-\overline{\varphi}_+(\sigma)=\overline{\varphi}_-(\sigma)-[1+\overline{K}_-(\sigma)]\overline{\tau}_-^{(2)}(\sigma)\equiv\overline{L}_-^{(2)}(\sigma). \quad (11)$$

Применив к (11) обратное преобразование Фурье, получим равенство: $L_+^{(1)}(x)=L_-^{(2)}(x)$ $(-\infty<x<\infty)$, которое указывает, что $L_+^{(1)}(x)$ и $L_-^{(2)}(x)$ являются обобщенными функциями сосредоточенными в нуле. Следовательно, их можно представить в виде [2,4]:

$$L_+^{(1)}(x)=L_-^{(2)}(x)=\sum_{k=0}^n a_k\delta^{(k)}(x) \quad (a_k=const;\ -\infty<x<\infty). \quad (12)$$

Далее применив к (12) действительное интегральное преобразование Фурье, получим:

$$\overline{L}_+^{(1)}(\sigma)=\overline{L}_-^{(2)}(\sigma)=\sum_{k=0}^n a_k(-i\sigma)^k \qquad (-\infty<\sigma<\infty). \quad (13)$$

Но так как $\overline{L}_+^{(1)}(\sigma)$ и $\overline{L}_-^{(2)}(\sigma)$ стремятся к нулю при $|\sigma|\to\infty$, то из (13) следует, что $a_k=0$ $(k=\overline{0;n})$. Это означает, что $\overline{L}_+^{(1)}(\sigma)\equiv\overline{L}_-^{(2)}(\sigma)\equiv 0$ для всех $-\infty<\sigma<\infty$. Тогда из (11) после применения обратного преобразования Фурье получим искомые величины:

$$\tau^{(1)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\overline{\varphi}_+(\sigma)}{1+\overline{K}_+(\sigma)}e^{-i\sigma x}d\sigma \qquad (0<x<\infty), \quad (14)$$

$$\tau^{(2)}(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{\overline{\varphi}_-(\sigma)}{1+\overline{K}_-(\sigma)}e^{-i\sigma x}d\sigma \qquad (-\infty<x<0). \quad (15)$$

Таким образом получено замкнутое решение рассматриваемой контактной задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муки Р., Стернберг Е. *Передача нагрузки от растягиваемого поперечного стержня к полубесконечной упругой пластине.* // ПМ. Труды Амер. Общ. Инж.-Мех. Сер Е. 1968, Т. 4, С. 124-135.
2. Григорян Э.Х. *Передача нагрузки от кусочно-однородной бесконечной накладки к упругой полуплоскости.* // Уч. записки ЕГУ, Т. 3, 1979, С. 29–34.
3. Benthem J.P. *On the diffusion of a load from a semi-infinite stringer bounded to a sheet.* // Contr. Th. Airer. Struct. 1972, P. 117–134.
4. Крейн С.Г. *Линейные уравнения в банаховом пространстве.* М.: Наука, 1971.

УДК 517.958

АДИАБАТИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП В АБЕЛЕВОЙ МОДЕЛИ ХИГГСА

ADIABATIC PRINCIPLE IN THE ABELIAN HIGGS MODEL

Р. В. Пальвелев[1]

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва
palvelev@mi.ras.ru

$(2+1)$-Мерная *абелева модель Хиггса* возникает в теории сверхпроводимости. Она управляется *функционалом действия Гинзбурга–Ландау*

$$S(\mathcal{A},\Phi)=\int_0^{T_0}\left(T(\mathcal{A},\Phi)-U(\mathcal{A},\Phi)\right)\,dt \tag{1}$$

на пространстве $\mathbb{R}^{1+2}$ с координатами $(x_0=t,x_1,x_2)$. Действие $S(\mathcal{A},\Phi)$ зависит от переменных $\mathcal{A}$ и Φ, где $\mathcal{A}$ есть U(1)-связность на $\mathbb{R}^{1+2}$, задаваемая 1-формой $\mathcal{A}=A_0dt+A_1dx_1+A_2dx_2=:A^0+A$на $\mathbb{R}^{1+2}$ с гладкими чисто мнимыми коэффициентами $A_\mu=A_\mu(t,x_1,x_2)$, $\mu=0,1,2$. Переменная Φ есть *поле Хиггса*, задаваемое гладкой комплекснозначной функцией $\Phi=\Phi(t,x_1,x_2)=\Phi_1+i\Phi_2$ на $\mathbb{R}^{1+2}$. Физически, можно представлять себе $\mathcal{A}$ как вектор-потенциал электромагнитного поля, а Φ как взаимодействующее с ним скалярное поле (в теории сверхпроводимости поле Φ представляет собой волновую функцию пар Купера – носителей сверхпроводящего тока).

Потенциальная энергия модели $U(\mathcal{A},\Phi)$ определяется формулой

$$U(\mathcal{A},\Phi)=\frac{1}{2}\int\left\{|F_{12}|^2+|\nabla_{A,1}\Phi|^2+|\nabla_{A,2}\Phi|^2+\frac{1}{4}(1-|\Phi|^2)^2\right\}dx_1dx_2,$$

а *кинетическая энергия* $T(\mathcal{A},\Phi)$ — формулой

$$T(\mathcal{A},\Phi)=\frac{1}{2}\int\left\{|F_{01}|^2+|F_{02}|^2+|\nabla_{A,0}\Phi|^2\right\}dx_1dx_2.$$

Здесь $F_{ij}=\partial_iA_j-\partial_jA_i,\quad \nabla_{A,j}=\partial_j+A_j,\quad \partial_j:=\partial/\partial x_j\ ,\ i,j=0,1,2.$

Подчеркнем, что потенциальная энергия $U(\mathcal{A},\Phi)$ зависит только от пространственных компонент потенциала $\mathcal{A}$, так что $U(\mathcal{A},\Phi)=U(A,\Phi)$.

В дальнейшем предполагается, что потенциальная энергия системы $U(A,\Phi)$ конечна. Ввиду этого естественно наложить на поле Φ условие существования равномерного предела $|\Phi|$, равного 1, в пространственной бесконечности: $|\Phi|\to 1$ при $|x|:=\sqrt{x_1^2+x_2^2}\to 1$. При этом условии отображение, задаваемое ограничением Φ на плоскость переменных $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$, переводит окружности $S^1_R\subset\mathbb{R}^2$ достаточно

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-01-00178-а и Программы государственной поддержки ведущих научных школ (НШ-2928.2012.1).

большого радиуса R в топологические окружности и потому обладает целочисленным топологическим индексом (степенью). Этот индекс называется иначе числом вращения или *вихревым числом.*

Уравнения Гинзбурга–Ландау есть уравнения Эйлера–Лагранжа для действия Гинзбурга–Ландау $S(\mathcal{A}, \Phi)$, задаваемого формулой (1). Они имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \partial_1 F_{01} + \partial_2 F_{02} = -i \operatorname{Im}(\bar{\Phi} \nabla_{A,0} \Phi) \\ \partial_0 F_{0j} + \sum_{k=1}^{2} \varepsilon_{jk} \partial_k F_{12} = -i \operatorname{Im}(\bar{\Phi} \nabla_{A,j} \Phi), \ j = 1, 2 \\ (\nabla_{A,0}^2 - \nabla_{A,1}^2 - \nabla_{A,2}^2)\Phi = \frac{1}{2}\Phi(1 - |\Phi|^2), \end{cases} \tag{2}$$

где $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = 1, \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$.

Уравнения Эйлера–Лагранжа (2), так же как действие (1), инвариантны относительно *калибровочных преобразований*, задаваемых посредством

$$A_\mu \longmapsto A_\mu + i\partial_\mu \chi, \quad \Phi \longmapsto e^{-i\chi}\Phi, \quad \mu = 0, 1, 2,$$

где χ – гладкая вещественнозначная функция на $\mathbb{R}^{1+2}$.

Для дальнейшего удобно ввести на плоскости $\mathbb{R}^2_{x_1,x_2}$ комплексную координату $z = x_1 + ix_2$, отождествляя тем самым ее с комплексной плоскостью $\mathbb{C}$.

Статические решения модели — это решения, для которых $A_0 = 0$, а A_1, A_2, Φ не зависят от времени. Все такие решения были полностью описаны Таубсом (см. [1]). А именно, если N— целое неотрицательное число и заданы N точек $Z_1, Z_2, \dots Z_N$ нга комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то существует единственное с точностью до статических (с функцией χ, не зависящей от времени) калибровочных преобразований решение (A_1, A_2, Φ), для которого нули Φ — это в точности $Z_1, Z_2, \dots Z_N$ с учетом кратности, и вихревое число которого равно N (*N-вихревое решение* или N-вихрь). О нулях поля Φ говорят как о центрах вихрей. Также существует единственное с точностью до статических калибровочных преобразований решение с нулями Φ в точках $Z_1, Z_2, \dots Z_N$ такое, что его вихревое число равно $-N$ (*N-антивихревое решение*). Других статических решений с конечной потенциальной энергией, кроме описанных, нет.

Из этой теоремы вытекает, что *пространство модулей N-вихрей*, определяемое как

$$\mathcal{M}_N = \frac{\{N\text{-вихри } (A, \Phi)\}}{\{\text{статические калибровочные преобразования}\}}\ , \tag{3}$$

можно отождествить с N-й симметрической степенью комплексной плоскости $\mathbb{C}$:

$$\mathcal{M}_N = \operatorname{Sym}^N \mathbb{C},$$

т.е. с пространством неупорядоченных наборов из N точек на комплексной плоскости. Последнее пространство можно отождествить с $\mathbb{C}^N$, сопоставляя каждому такому набору полином со старшим коэффициентом 1, имеющий нули в заданных точках с предписанными кратностями. Тем самым пространство модулей N-вихрей является конечномерным гладким многообразием.

Функционал T определяет на пространстве модулей $\mathcal{M}_N$ гладкую риманову метрику, которая называется *кинетической метрикой* (подробнее см. [2]).

В отличие от статических, динамические решения абелевой (2+1)-мерной модели Хиггса изучены мало, и вопрос о сколь-нибудь полном их описании представляется очень сложной задачей. В связи с этим используются различные методы приближенного описания поведения динамических решений.

Адиабатический принцип утверждает, что геодезические кинетической метрики на $\mathcal{M}_N$ можно рассматривать как приближения к динамическим решениям с малой кинетической энергией. Долгое время этот принцип использовался различными авторами как эвристический. Изучая геодезические на пространстве модулей N-вихрей, они получали качественные результаты о динамике вихрей. Обоснование этого принципа для абелевой (2+1)-мерной модели Хиггса было недавно получено автором:

Теорема 1 [3]. *Пусть $Q\colon [0;\infty) \to \mathcal{M}_N$ — геодезическая на $\mathcal{M}_N$ в натуральном параметре. Существуют*

- *число $\tau_0 > 0$;*
- *кривая $(\alpha_1, \alpha_2, \phi)(\tau)$, $\tau \in [0, \tau_0]$, из статических N-вихревых решений такая, что при каждом τ решение $(\alpha_1, \alpha_2, \phi)(\tau)$ лежит в классе $Q(\tau) \in \mathcal{M}_N$, и гладкая (т.е. функции $\alpha_{1,2}(\tau, x, y)$ и $\phi(\tau, x, y)$ гладкие);*
- *положительные числа ε_0 и M*

такие, что для любого $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0)$ на отрезке $t \in \left[0; \dfrac{\tau_0}{\varepsilon}\right]$ существует решение $(A_0, A_1,\ A_2, \Phi)$ уравнений Эйлера-Лагранжа динамической задачи (2), *отклонение которого от кривой $(\alpha_1, \alpha_2, \phi)(\varepsilon t)$ имеет порядок ε^2. Более точно, решение имеет вид*

$$A_0(t,x,y) = \varepsilon^3 a_0^\varepsilon(t,x,y), \qquad A_1(t,x,y) = \alpha_1(\varepsilon t; x, y) + \varepsilon^2 a_1^\varepsilon(t,x,y),$$
$$A_2(t,x,y) = \alpha_2(\varepsilon t; x, y) + \varepsilon^2 a_2^\varepsilon(t,x,y), \qquad \Phi(t,x,y) = \phi(\varepsilon t; x, y) + \varepsilon^2 \varphi^\varepsilon(t,x,y),$$

где поправки $a_0^\varepsilon, a_1^\varepsilon, a_2^\varepsilon, \varphi^\varepsilon$ ограничены независимо от ε:

$$\forall t \in \left[0; \frac{\tau_0}{\varepsilon}\right] \quad \|a_{0,1,2}^\varepsilon(t)\|_3, \|\varphi_{1,2}^\varepsilon(t)\|_3 \leqslant M;$$

здесь $\varphi_1^\varepsilon = \operatorname{Re}\varphi^\varepsilon$, $\varphi_2^\varepsilon = \operatorname{Im}\varphi_2^\varepsilon$, $\|\cdot\|_3$ обозначает норму в пространстве Соболева $H^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Jaffe A., Taubes C.H. *Vortices and monopoles. Boston: Birkhäuser*, 1980. 287 pp.
2. Пальвелев Р.В. *Рассеяние вихрей в абелевой модели Хиггса* // Теор. и мат. физ. 2008. Т. 156, № 1. С. 77–91.
3. Пальвелев Р.В. *Обоснование адиабатического принципа в абелевой модели Хиггса* // Труды Московского математического общества. 2011. Т. 72, № 2. С. 281–314.

УДК 515.17+517.545

ТЕОРЕМЫ О ВЫЧЕТАХ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА ЛЮБОГО ПОРЯДКА

RESIDUE THEOREMS FOR PRYM DIFFERENTIALS OF ANY ORDER

Т. А. Пушкарёва[1]

Горно-Алтайский государственный университет, Горно-Алтайск
pushkareva.tanya@gmail.com

Теорема о полной сумме вычетов для абелева 1-дифференциала на компактной римановой поверхности играет большую роль в теории функций. Вычеты для дифференциалов Прима можно определять только для ветвей таких многозначных дифференциалов. В данной работе впервые будут доказаны теоремы о полной сумме вычетов для дифференциалов Прима любого порядка на переменной компактной римановой поверхности с любыми переменными характерами.

Пусть F будет фиксированная компактная ориентированная поверхность рода $g \geq 2$, с отмечанием $\{a_k, b_k\}_{k=1}^{g}$, т. е. набором образующих для $\pi_1(F)$; F_0 — фиксированная комплексно-аналитическая структура на F. Любая другая комплексно-аналитическая структура на F задается некоторым дифференциалом Бельтрами μ на F_0, т. е. выражением вида $\mu(z)d\overline{z}/dz$, которое инвариантно относительно выбора локального параметра на F_0, $\mu(z)$ — комплекснозначная функция на F_0 и $\|\mu\|_{L_\infty(F_0)} < 1$. Эту структуру на F будем обозначать через F_μ. Характером ρ для F_μ называется любой гомоморфизм

$$\rho : (\pi_1(F_\mu), \cdot) \to (\mathbf{C}^*, \cdot),\ \mathbf{C}^* = \mathbf{C} \setminus \{0\}.$$

Теорема 1. *(о полной сумме вычетов для 1−дифференциала Прима). Для любого 1-дифференциала Прима ω с любыми характером ρ и полярным дивизором*

$$(\omega)_\infty = P_1^{\alpha_1} \dots P_m^{\alpha_m}, \alpha_j > 0,\ j = 1, \dots, m,$$

с попарно различными точками $P_1, \dots, P_m, m \geq 2$, на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ верно равенство

$$\sum_{j=1}^{m} res_{P_j} \omega f = 0,$$

где 1) если ρ - несущественный характер, то f — мультипликативная единица для ρ^{-1};

2) если ρ — существенный характер, то f - единственная, с точностью до умножения на ненулевую константу, мультипликативная функция для ρ^{-1} с единственным простым полюсом P_1 на F_μ.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 12-01-90800-мол_рф_нр.

Теорема 2. *(о полной сумме вычетов для $(\rho, q)-$дифференциала). Для любого $(\rho,\ q)-$дифференциала τ с любыми характером ρ и полярным дивизором*

$$(\tau)_\infty = Q_1^{\alpha_1} \dots Q_s^{\alpha_s}$$

с попарно различными точками $Q_1, \dots, Q_s, s \geq 2$, и любого целого числа $q \neq 0, 1$ на переменной компактной римановой поверхности F_μ рода $g \geq 2$ верно равенство

$$\sum_{j=1}^{s} res_{Q_j} \frac{\tau f}{\omega_0^{q-1}} + \sum_{j=1}^{g+1} res_{S_j} \frac{\tau f}{\omega_0^{q-1}} = 0,$$

где 1) если ρ — существенный характер, то f - единственная, с точностью до умножения на ненулевую константу, мультипликативная функция для ρ^{-1} с единственным простым полюсом в Q_1 на F_μ;

2) если ρ — несущественный характер, то f - мультипликативная единица для ρ^{-1} на F_μ.

Причём, в обоих случаях, ω_0 — абелев дифференциал, с условием

$$(\omega_0) = S_1 ... S_g S_{g+1}^{g-2},\ \varphi_{S_{g+1}}(S_1 ... S_g) = -2K$$

в многообразии Якоби $J(F_\mu)$, и $\{S_1, ..., S_g, S_{g+1}\} \cap \{Q_1, ..., Q_s\} = \emptyset$ на F_μ.

Из этих теорем, как следствие, получаются: законы взаимности для функций и дифференциалов Прима, необходимое и достаточное условие существования дифференциала Прима любого порядка с заданными простыми полюсами и вычетами в них для ветви этого дифференциала, а также теоремы о разложении произвольного мероморфного дифференциала Прима в сумму элементарных и аналог формулы разложения П.Аппеля для мультипликативных функций в сумму элементарных интегралов Прима с любым характером на переменной компактной римановой поверхности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чуешев В. В. *Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности.* Кемерово: КемГУ, 2003. Ч. 2. 241 с.
2. Головина М.И. *Дивизоры дифференциалов Прима на римановой поверхности* // Труды международной школы-конференции по геометрии и анализу. Вестник КемГУ. Сер. Математика. Информатика. 2011. N. 3/1. С. 193–198.
3. Пушкарёва Т.А. *Вычеты и элементарные дифференциалы Прима на компактной римановой поверхности* // Вестник НГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2012 (в печати).

УДК 517.55

РАЗНОСТНЫЙ АНАЛОГ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ ХЕРМАНДЕРА

THE DIFFERENCE ANALOG OF HÖRMANDER'S THEOREM

М. С. Рогозина[1]

Сибирский федеральный университет, Красноярск
rogozina.marina@mail.ru

Сформулируем теорему, полученную Л. Хермандером в связи с исследованием задачи Коши для полиномиального дифференциального оператора $P(D) = D^\beta + \sum\limits_{|\alpha|\leqslant m,\, \alpha\neq\beta} c_\alpha D^\alpha$, где $D = (D_1,\, ...,\, D_n)$, $D_j = \frac{\partial}{\partial z_j}$, $j = 1,\, 2,\, ...,\, n$, коэффициенты c_α — аналитические функции от $z = (z_1,\, ...,\, z_n)$ в окрестности нуля в пространстве $\mathbb{C}^n$.

Теорема 1 (Хермандер Л. [1]). *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$P(D)u = h \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$D_j^k(u-\Phi) = 0 \,\textit{при}\, z_j = 0,\ \textit{если}\, 0 \leqslant k < \beta,\ \textit{и}\, j = 1,\, \ldots,\, n. \tag{2}$$

Если $\sum\limits_{|\alpha|=|\beta|} |c_\alpha(0)|$ *меньше некоторого положительного числа, зависящего только от* $|\beta|$, *то тогда для любых функций* h *и* Φ, *аналитических в окрестности нуля, краевая задача (1)-(2) имеет, и притом единственное, аналитическое в окрестности нуля решение* u.

Отметим, что теорема Коши-Ковалевской получается из теоремы Хермандера, если $\beta = (m, 0, \ldots, 0)$и $c_\beta \neq 0$, а теорема Дарбу-Гурса-Бодо при $\beta = (m-1,\, \beta_2,\, \beta_3,\, \ldots,\, \beta_n)$, $c_{(m,\,0,\,\ldots,\,0)} = 0$, $c_{(m-1,\,\beta_2,\,\ldots,\,\beta_n)} \neq 0$.

Приведем разностный аналог задачи (1) — (2).

Обозначим $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}$ – n-мерную целочисленную решетку и $\mathbb{Z}^n_+$ — подмножество этой решетки, состоящее из точек с целыми неотрицательными координатами. Пусть δ_j — оператор сдвига по переменной x_j, то есть $\delta_j f(x_1,\, \ldots,\, x_j,\, \ldots,\, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j+1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ и $\delta = (\delta_1,\, \ldots,\, \delta_n)$. Будем рассматривать полиномиальный разностный оператор вида

$$P(\delta) = \sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha \delta^\alpha,$$

где $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1}\ldots\delta_n^{\alpha_n}$, константы c_α– коэффициенты оператора, m – порядок разностного оператор $P(\delta)$.

Для двух точек $x,\, y \in \mathbb{Z}^n$ неравенство $x > y$ означает, что $x_i > y_i$ для $i = 1,\, \ldots,\, n$, а запись $x \ngeq y$ означает, что хотя бы для одного $i_0 \in \{1,\, \ldots,\, n\}$ $x_{i_0} < y_{i_0}$.

Фиксируем β такое, что $|\beta| = m$ и $c_\beta \neq 0$.

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации №1.34.11

Разностным аналогом задачи (1) — (2) является следующая задача: *найти решение разностного уравнения*

$$P(\delta)f(x) = g(x), \;\; x \in \mathbb{Z}^n_+, \tag{3}$$

удовлетворяющее условию

$$f(x) = \varphi(x), \;\; x \in \mathbb{Z}^n_+, \, x \not\geq \beta. \tag{4}$$

Здесь $g(x)$ и $\varphi(x)$ — заданные функции целочисленных аргументов.

Определение 1. *Фундаментальным решением задачи (3) — (4) называется решение $\mathcal{P}_\beta$ уравнения $P(\delta)\mathcal{P}_\beta = \delta_0(x)$, удовлетворяющее краевым условиям $\mathcal{P}_\beta(x) = 0$ для $x \in \mathbb{Z}^n_+$, $x \not\geq \beta$.*

Здесь $\delta_0(x) = 0$, если $x \neq 0$ и $\delta_0(x) = 1$, если $x = 0$.

Теорема 2. *Если задача (3) — (4) для любых $g(x)$ и $\varphi(x)$ имеет единственное решение, то его можно записать в виде*

$$f(x) = \sum_{y \not\geq 0} \left(\sum_{\alpha} c_\alpha \varphi(y+\alpha) \right) \mathcal{P}_\beta(x-y), \tag{5}$$

где $\mathcal{P}_\beta$ — фундаментальное решение задачи (3) — (4).

Отметим, что формула (5) аналогична формулам для решения задачи Коши, полученным в [2], [3] при других ограничениях на разностный оператор $P(\delta)$.

Теорема 3. *$(n = 2)$ Если для коэффициентов разностного оператора $P(\delta)$ выполняется условие*

$$|c_\beta| > \sum_{\alpha \neq \beta, \, |\alpha| = |\beta|} |c_\alpha| \,, \tag{6}$$

то тогда для любых $g(x)$ и $\varphi(x)$ задача (3) — (4) имеет решение, и притом единственное.

Определение 2 (см, например, [4]). *Амебой алгебраической гиперповерхности называется образ множества нулей V многочлена $P(z) = \sum\limits_{\alpha \in A} c_\alpha z^\alpha$ при отображении $Log: \; z = (z_1, \ldots, z_n) \to (log\,|z_1|\,, \ldots, log\,|z_n|) = Log\,|z|\,.$*

Множество V, а значит и $LogV$, замкнуто, поэтому его дополнение открыто. Оно состоит из конечного числа связных выпуклых компонент.

Выполнение условия (6) означает, что компонента дополнения амебы характеристического многочлена $P(z)$, соответствующая точке β многогранника Ньютона, не пуста. Это важно для исследования устойчивости задачи (3) — (4) (см., например, [3]).

Для доказательства теоремы 3 определим матрицу T_∞, ассоциированную с полиномиальным разностным оператором

$$P(\delta_1,\delta_2) = q_0\delta_1^{\alpha_0}\delta_2^{\beta_0} + \sum_{j=0,\, j\neq l}^{m} q_{-l+j}\delta_1^{j}\delta_2^{m-j} + \sum_{\alpha+\beta<m} c_{\alpha\beta}\delta_1^{\alpha}\delta_2^{\beta},$$

а именно:

$$\mathrm{T}_\infty = \left\| \begin{matrix} q_0 & q_1 & q_2 & \cdots & q_k & 0 & \cdots \\ q_{-1} & q_0 & q_1 & \ddots & \vdots & q_k & \ddots \\ q_{-2} & q_{-1} & \ddots & \ddots & q_2 & \vdots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & q_1 & q_2 & \vdots \\ q_{-l} & \cdots & q_{-2} & q_{-1} & q_0 & q_1 & \ddots \\ 0 & q_{-l} & \cdots & q_{-2} & q_{-1} & q_0 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{matrix} \right\|$$

Отметим, что T_∞ — теплицева матрица, то есть на всех диагоналях матрицы, параллельных главной диагонали и на самой главной диагонали, элементы матрицы одинаковы: $a_{ij} = q_{i-j}$.

Доказательство теоремы 3 сводится к доказательству двух лемм.

Лемма 1. *Если для любого p все главные миноры D_p порядка p ассоциированной матрицы T_∞ не равны нулю: $D_p \neq 0$, $p = 1, 2, \ldots$, то задача (3) – (4) имеет единственное решение.*

Определение 3 (см, например, [5]). *Матрица $\|a_{ij}\|_{p\times p}$ называется матрицей с диагональным преобладанием, если*

$$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|.$$

Лемма 2. *При выполнении условия (5) ассоциированная матрица T_∞ является матрицей с диагональным преобладанием и, следовательно, для любого p главные миноры $D_p \neq 0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Хермандер Л. *Линейные дифференциальные операторы с частными производными.* М.: Мир, 1965. 381 с.
2. Лейнартас Е.К. *Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений* // Сиб. матем. журн. 48(2007) С. 335–340.
3. Рогозина М.С. *Устойчивость многослойных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей* // Журнал СФУ. Математика и физика. 2012. Т. 5, №2. С. 256–263.
4. Forsberg M., Passare M., Tsikh A. *Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas* // Advances in Mathematics, 151(2000), №1, 45–70.
5. Шарый С.П. *Курс вычислительных методов.* Новосибирск, 2012. 315 с.

УДК 517.9

ПОСТРОЕНИЕ НОВЫХ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

CONSTRUCTION OF NEW CLASSES OF SOLUTIONS TO THE MINIMAL SURFACE EQUATION

С. И. Сенашов[1], О. Н. Черепанова

Сибирский государственный аэрокосмический университет имени ак. М. Ф. Решетнева, Красноярск
Сибирский федеральный университет, Красноярск
sen@mx1.sibsau.ru, cheronik@mail.ru

Поверхность, заданная уравнением $z = u(x, y)$, называется минимальной поверхностью, если она удовлетворяет уравнению Эйлера – Лагранжа

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) выведено в 1768 году, и с тех пор его исследованию и решению посвящено множество работ. Его изучали Ж. Лагранж, Л. Эйлер, Г. Монж, С.Пуассон, С. Ли и другие известные математики. Уравнение (1) часто возникает при исследовании и решении задач механики жидкости, теории пластичности, в архитектуре и т.п. Несмотря на долгую историю для уравнения (1) осталось много не решенных задач. В работе построены новые точные решения уравнения (1).

Рассмотрим поверхность вида

$$z = u(x, y), \tag{2}$$

которая удовлетворяет уравнению (1).

С помощью контактного преобразования Лежандра

$$\begin{gathered} u_x = \xi, \quad u_y = \eta, \quad w_\xi = x, \quad w_\eta = y, \\ u(x, y) = x\xi + y\eta - w(\xi, \eta) \end{gathered} \tag{3}$$

уравнение (1) сводится к линейному уравнению

$$(1 + \xi^2)w_{\xi\xi} + 2\xi\eta w_{\xi\eta} + (1 + \eta^2)u_{\eta\eta} = 0, \tag{4}$$

при условии, что якобиан преобразования

$$J = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 \neq 0. \tag{5}$$

[1]Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно - педагогические кадры инновационной России на 2009 - 2013 гг.» (проект №1121)

Нетрудно проверить, что поверхности

$$u(x,y) = x\operatorname{tg} y, \tag{6}$$

$$u(x) = \ln\frac{\cos x}{\cos y}, \tag{7}$$

$$u(x,y) = arcch(x^2+y^2), \tag{8}$$

(геликоид, поверхность Шерка, катеноид, соответственно) являются решениями уравнения (1) и удовлетворяют условию (5)

Применим контактное преобразование Лежандра (3) к уравнениям (6) — (8). Тогда уравнения (6) — (8) преобразуются к виду

$$w(\xi,\eta) = \eta\operatorname{arctg}\xi, \tag{9}$$

$$w(\xi,\eta) = -\xi\operatorname{arctg}\xi + \eta\operatorname{arctg}\eta + \ln\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\eta^2}}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned} w(\xi,\eta) =& \sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}} - \\ &- \ln\left(\frac{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}{\xi^2+\eta^2}\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Определение. Пусть X и Y суть топологические пространства. Гомотопией называется непрерывное отображение $F : [0,1]\times X \to Y$.

Поскольку соотношения (9) — (11) удовлетворяют линейному уравнению (4), то их гомотопия также будет являться решением этого уравнения. Тогда

$$w^1_{\text{н}} = a(\eta arctg\xi) + (1-a)\left[-\xi arctg\xi + \eta\operatorname{arctg}\eta + \ln\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\eta^2}}\right], \tag{12}$$

$$\begin{aligned} w^2_{\text{н}} =& a(\eta arctg\xi) + (1-a)\left[\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}} - \right.\\ &\left. - \ln\left(\frac{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}{\xi^2+\eta^2}\right)\right], \end{aligned} \tag{13}$$

$$w_{\text{н}}^3 = a\left[-\xi arctg \xi + \eta \operatorname{arctg} \eta + \ln\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\eta^2}}\right] +$$

$$+(1-a)\left[\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}} - \right. \tag{14}$$

$$\left. - \ln\left(\frac{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}{\xi^2+\eta^2}\right)\right],$$

где $w_{\text{н}}^1, w_{\text{н}}^2, w_{\text{н}}^3$ — новые решения уравнения (4), a — вещественный параметр, удовлетворяющий неравенству $0 \leqslant a \leqslant 1$.

Применяя к уравнениям (12) — (14) обратное контактное преобразование Лежандра и проводя вычисления, получим уравнения, которые описывают новые классы решений уравнения минимальных поверхностей (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Осерман Р. *Минимальные поверхности.* М.: УМН, 1967. т.22.в.4.С.55-134
2. Сенашов С. И., Черепанова О. Н. *Гомотопия решений уравнения минимальных поверхностей* //Красноярск Вестник СибГАУ. 1. вып. вып.2(23). С. 84.

УДК 517. 95

ЛИНЕЙНОЕ И НЕЛИНЕЙНОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

LINEAR AND NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FOURTH ORDER

А. Г. Соколова, Н. А. Чуешева

Кемеровский государственный университет, Кемерово
sanechka1112s@mail.ru, chuesheva@ngs.ru

В работе С.Л. Соболева [1] была предложена математическая модель малых колебаний идеальной вращающейся жидкости, которая описывается уравнением вида:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\triangle u + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Рассмотрим область $D = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad x \in (0,1), \quad y \in (0,1)\}$ с кусочно-гладкой границей Г. Пусть в области D задано уравнение

$$u_{yyxx} - u_{xxx} + u_{yyy} + a_1 u_{xxy} + \\ + a_2 u_{yyx} + a_3 u_{yy} + a_4 u_{xx} + a_5 u_y + a_6 u_x + a_7 u = f(x,y) \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u|_\Gamma = 0, \qquad u_x|_{x=0} = u_y|_{y=0} = 0. \quad (2)$$

Теорема 1 (существования и единственности). *Пусть правая часть уравнения (1) функция $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть существуют постоянные λ, μ, $\varepsilon > 0$, δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 такие, что для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия*

1) $\left(1 - |\lambda a_1 + \mu a_2 - \lambda\mu| \frac{\varepsilon}{2}\right) \geq \delta_1 > 0;$

2) $\left(\frac{-3\lambda - \mu^2 + \mu a_1}{2} - a_4\right) \geq \delta_2 > 0;$

3) $\left(\frac{3\mu - \lambda^2 + \lambda a_2}{2} - a_3\right) \geq \delta_3 > 0;$

4) $\left(a_7 + \frac{\mu^2 a_3 + \lambda^3 - \mu^3 + \lambda^2 a_4 - \mu a_5 - \lambda a_6}{2} - |\lambda a_1 + \mu a_2 - \lambda\mu| \frac{1}{2\varepsilon}\right) \geq \delta_4 > 0;$

5) $a_1 < 0, \quad a_2 > 0 \quad a_3 < 0, \quad a_4 < 0, \quad a_7 > 0.$

Тогда решение $u(x,y)$ задачи (1), (2) из пространства $H(D)$ существует и единственное.

Здесь $H(D)$ - гильбертово пространство с нормой

$$\|u(x,y)\|_{H(D)} = \left(\int\limits_D u^2 + u_x^2 + u_y^2 + u_{xy}^2 + u_{xxy}^2 + u_{xyy}^2 dD \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Теорема 2. *(существования и единственности). Пусть правая часть уравнения (1) функция $f(x,t) \in L_2(D)$. Пусть существуют постоянные λ, μ, δ_1, δ_2 такие, что для коэффициентов уравнения (1) выполнены условия*

1) $a_7 > 0$, *число* a_7 *-достаточно большое;*

2) $\left(\frac{-3\lambda-\mu^2+\mu a_1}{2} - a_4\right) \geq \delta_1 > 0;$

3) $\left(\frac{3\mu-\lambda^2+\lambda a_2}{2} - a_3\right) \geq \delta_2 > 0;$

4) $a_1 < 0, \quad a_2 > 0 \quad a_3 < 0, \quad a_4 < 0.$

Тогда решение $u(x,y)$ *задачи (1), (2) из пространства* $H(D)$ *существует и единственное.*

Утверждение 1. *Рассмотрим в области* D *линейное уравнение*

$$u_{yyxx}(x,y) - u_{xxx}(x,y) + u_{yyy}(x,y) - u_{xxy}(x,y) + u_{yyx}(x,y) = 0. \tag{3}$$

Для него можно построить точное решение с шестью неопределенными коэффициентами.

Утверждение 2. *Рассмотрим в области* D *нелинейное уравнение*

$$u_x \cdot u_{yyxx} - u_{xxx} + u_{yyy} - u_{xxy} + u_{yyx} + 3\left(u_x\right)^2 u_{xx} - u_x \cdot u_{yx} - u_y \cdot u_{xx} = 0, \tag{4}$$

где $u = u(x,y)$. Для него можно построить точное решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Соболев С. Л. *Об одной новой задаче математической физики*// Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1954. Т. 18. № 1. С. 3–50.

УДК 517.958

ЭВОЛЮЦИОННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

EVOLUTIONARY ALGORITHMS IN MATHEMATICAL PHYSICS

Гайк С. Сукиасян

Институт Математики НАН Армении
E-mail: haikarin@netsys.am

В последнее время для решения сложных математических задач применяются эволюционные алгоритмы, использующие кроме математического аппарата также результаты теории эволюции живой природы. Для математических объектов (числа, функции, поверхности и т.д.) определяются операции биологического характера (кроссовер, мутация, селекция, миграция, инбридинг) и изучается, какую эволюцию претерпит популяция математических объектов через несколько миллионов поколений.

Рассмотрен класс задач математической физики, для которых эволюционные методы эффективнее стандартных методов решения. Для двумерных дифференциальных уравнений $L(A, \mu) = 0$ с двумя зависимыми переменными типа Максвелла при помощи эволюционных методов получены графики численного решения.

УДК 517.55

О МНОГОМЕРНОМ АНАЛОГЕ ζ-ФУНКЦИИ ВЕЙЕРШТРАССА

ON A MULTIDIMENSIONAL ANALOG OF THE WEIERSTRASS ζ-FUNCTION

Е. Н. Терешонок[1], А. В. Щуплев[1]

Сибирский федеральный университет, Красноярск
l.tereshonok@gmail.com, alexey.shchuplev@gmail.com

Одной из классических задач теории чисел является задача, поставленная К. Ф. Гауссом и касающаяся оценки числа целых точек в круге. В 1837 году К. Гаусс получил первую такую оценку, погрешность которой была порядка r, где r — радиус круга. Далее В. Серпинским эта оценка была улучшена до порядка $O\left(r^{\frac{2}{3}}\right)$. В настоящий момент лучшая оценка получена M. Huxley — $O\left(r^{\frac{46}{73}}\right)$.

Также данную задачу рассматривают применительно к многомерным и другим произвольным плоским областям.

В работе [1] была получена формула, выражающая разность числа целых точек в области в $\mathbb{C}^1$ и объёма этой области:

$$I\left(D\right) - \mathrm{Vol}\left(D\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial D}\left(\zeta\left(z\right) - \pi\bar{z}\right)dz, \qquad (1)$$

где $\zeta(z)$ — функция Вейерштрасса для решётки гауссовых чисел:

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}}\left(\frac{1}{z-\gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2}\right).$$

В работе [2] формула (1) обобщается на многомерный случай.

Пусть $\Gamma = (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z})^n$ — целочисленная решётка в $\mathbb{C}^n$, через ω_{BM} обозначим $(0,\, n-1)$ дифференциальную форму:

$$\omega_{BM} = \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(-1\right)^{k-1}d\left[\bar{z}_k\right]}{\left\|z\right\|^{2n}}.$$

Следуя [3], определим многомерный аналог ζ-функции Вейерштрасса:

$$\zeta\left(z\right) = \\ = \omega_{BM}\left(z\right) + \sum_{\gamma\in\Gamma\setminus\{0\}}\left(\omega_{BM}\left(z-\gamma\right) + \omega_{BM}\left(\gamma\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\omega_{BM}}{\partial z_i}\left(\gamma\right)z_i + \frac{\partial\omega_{BM}}{\partial\bar{z}_i}\left(\gamma\right)\bar{z}_i\right)\right).$$

[1]Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации (№ 1.34.11)

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}^n \setminus \Gamma$.

Основной результат работы заключается в теореме 1.

Теорема 1. *Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂D, $I(D)$ — число целых точек внутри области, $Vol(D)$ — объём области D. Если ∂D не содержит целых точек, то*

$$I(D) - Vol(D) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial D} \tau(z) \wedge dz,$$

.

При доказательстве теоремы используется следующая лемма.

Лемма 1. *Существует дифференциальная $(0, n-1)$–форма $l(z)$ с линейными относительно z и $\bar{z}$ коэффициентами такая, что $\tau(z) = \zeta(z) - l(z)$ $\Gamma-$инвариантна.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Diaz R., Robins S. *Pick's Formula via the Weierstrass $\wp$-Function* // The American Mathematical Monthly. 1995. Vol. 102. № 5. P. 431–437.
2. Tereshonok E., Shchuplev A. *A multidimensional analog of the Weierstrass ζ-function in the problem of the number of integer points in a domain* // Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics. 2012. Vol. 5. № 4 (to appear)
3. Zappa P. *Sulle classi di Dolbeault di tipo* $(0, n-1)$ *con singolarita in un insieme discreto* //Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 8. 1981. no. 70. P. 87–95.

УДК 517.55

О КОЭФФИЦИЕНТАХ ТЕЙЛОРА НЕКОТОРОГО КЛАССА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

ON THE TAYLOR COEFFICIENTS OF A CLASS OF MULTIVARIATE RATIONAL FUNCTIONS

П. В. Тришин, В. М. Трутнев

Сибирский федеральный университет, Красноярск
pavel15@bk.ru, trutnev@lan.krasu.ru

Рассматривается класс рациональных функций многих комплексных переменных вида $1/P(z)$, для которых многогранник Ньютона $\mathcal{N}_P$ знаменателя P обладает свойством *полноты*, то есть вместе с каждой точкой $x \in \mathcal{N}_P$ он содержит гиперкуб $\{\widetilde{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \widetilde{x}_i < x_i\}$. Кроме этого, для многочлена

$$P(z) = \sum a_\alpha z^\alpha$$

для всех граней $\Gamma \subset \mathcal{N}_P$ многогранника $\mathcal{N}_P$, срезки

$$P_\Gamma(z) = \sum_{\alpha \in \Gamma} a_\alpha z^\alpha$$

не обращаются в нуль на $\mathbb{R}^n_+$.

В этих условиях справедлива

Теорема 1. *Пусть функция $1/P(z)$, где многочлен $P(z)$ удовлетворяет указанным выше свойствам, представляется в окрестности начала координат сходящимся степенным рядом*

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} C_\alpha z^\alpha \ .$$

Существует функция $F(w)$ вида

$$F(w) = \Phi(w) \prod \Gamma(\langle s_k, w \rangle - l_k) \ ,$$

где $\Phi(w)$ — целая функция, такая, что

$$F(\alpha) = C_\alpha \ .$$

УДК 517.55

О ЛОКАЛЬНЫХ ЦИКЛАХ, РАЗДЕЛЯЮЩИХ РОСТКИ КОМПЛЕКСНЫХ ГИПЕРПОВЕРХНОСТЕЙ

ON THE LOCAL CYCLES SEPARATING GERMS OF COMPLEX HYPERSURFACES

Р. В. Ульверт

Сибирский аэрокосмический университет, Красноярск
ulvertrom@yandex.ru

Рассмотрим систему $F_1, \ldots, F_m$ комплексных гиперповерхностей в комплексном аналитическом многообразии X комплексной размерности n. Обозначим $F = F_1 \cup \ldots \cup F_m$, и будем считать, что $m \geqslant n \geqslant 2$. Для разбиения $\mathcal{J}$ множества $\{1, \ldots, m\}$ на n непустых непересекающихся подмножеств $J_1, \ldots, J_n$ определим набор n гиперповерхностей $T_1, \ldots, T_n$, где

$$T_k = \bigcup_{j \in J_k} F_j.$$

Для каждой изолированной точки a пересечения гиперповерхностей $T_1, \ldots, T_n$ рассмотрим цикл

$$\Gamma_{\mathcal{J},a} = \{z \in U_a\colon\ |t_k(z)| = \varepsilon_k,\ k = 1, \ldots, n\}, \tag{1}$$

где t_k — определяющие функции для гиперповерхностей T_k в окрестности U_a точки a. Цикл $\Gamma_{\mathcal{J},a}$ является *локальным циклом* в точке a в том смысле, что его класс гомологий имеет представителей с носителями, лежащими в сколь угодно малой окрестности точки a. Локальный цикл $\Gamma_{\mathcal{J},a}$ возникает как цикл интегрирования в интеграле

$$\operatorname*{res}_{a}{}_t\, \omega = (2\pi i)^{-n} \int\limits_{\Gamma_{\mathcal{J},a}} \omega, \tag{2}$$

который определяется для мероморфной n-формы ω с полюсами на $T_1, \ldots, T_n$. Такой интеграл называют *локальным вычетом* (вычетом Гротендика) [1], поскольку он ассоциируется с идеалом в локальном кольце ростков $\mathcal{O}_a$, порожденном системой функций $t = (t_1, \ldots, t_n)$. Заметим, что при $m > n$ могут быть определены различные вычеты, связанные с различными способами группировки гиперповерхностей $F_1, \ldots, F_m$ и различными выборами изолированных точек a в пересечениях

$$T_1 \cap \ldots \cap T_n.$$

Пусть теперь Γ — это произвольный компактный n-цикл в $X \setminus F$, и рассматривается интеграл $\int_\Gamma \omega$. Нас будут интересовать условия, при которых цикл Γ гомологичен линейной комбинации локальных циклов (1) по всевозможным разбиениям $\mathcal{J}$ множества $\{1, \ldots, m\}$ и изолированным точкам a пересечения соответствующих гиперповерхностей $T_1, \ldots, T_n$. При этом вычисление интеграла $\int_\Gamma \omega$ сводится к вычислению локальных вычетов (2). Обозначим через $Z_{\mathcal{J}}$ дискретную часть пересечения гиперповерхностей $T_1, \ldots, T_n$.

Определение 1. *Подгруппа группы сингулярных (компактных) гомологий $H_n(X \setminus F)$, порожденная циклами $\Gamma_{\mathcal{J},a}$ для всевозможных разбиений $\mathcal{J}$ и точек $a \in Z_{\mathcal{J}}$, называется локально разделяющей подгруппой и обозначается $H_n^*(X \setminus F)$.*

Таким образом, мы исследуем условия, при которых класс цикла Γ принадлежит подгруппе $H_n^*(X \setminus F)$. Нетрудно показать [2], что каждый элемент локально разделяющей подгруппы *разделяет* гиперповерхности $F_1, \ldots, F_m$ в смысле следующего определения:

Определение 2. *Вещественно n-мерный цикл Γ называется разделяющим гиперповерхности $F_1, \ldots, F_m$, если*

$$\Gamma \sim 0 \text{ в } X \setminus F_{\alpha_1} \cup \ldots \cup F_{\alpha_{n-1}}$$

для любого поднабора индексов $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}\}$ из $\{1, \ldots, m\}$.

Следующая теорема А.К. Циха [1] показывает, что в случае $m = n$ в довольно общей ситуации условие разделения оказывается не только необходимым, но и достаточным для того, чтобы класс гомологий цикла принадлежал $H_n^*(X \setminus F)$.

Теорема 1. *Пусть X — многообразие Штейна комплексной размерности n, и $F_1, \ldots, F_n$ — набор гиперповерхностей в X. Тогда класс гомологий n-цикла Γ из $X \setminus F$ принадлежит подгруппе $H_n^*(X \setminus F)$ в том, и только том случае, когда Γ разделяет гиперповерхности $F_1, \ldots, F_n$.*

А.П. Южаковым и А.К. Цихом была сформулирована гипотеза о том, что утверждение теоремы 1 остается справедливым и в случае произвольного числа $m \geqslant n$ гиперповерхностей. Отметим, что в случае, когда $\{F_j\}$ — система n алгебраических гиперповерхностей, рационально зависящих от параметра $x = (x_1, \ldots, x_p)$, интеграл (2), как показано в [1], является алгебраической функцией от x. Поэтому факт подтверждения гипотезы значительно расширяет возможность распознания алгебраических функций.

Нашей целью является проверка гипотезы в локальном случае, то есть, когда X — сколь угодно малая штейнова окрестность точки из $\mathbb{C}^n$, а Γ — локальный цикл. Один из результатов А.П. Южакова [2] подтверждает гипотезу в локальном случае при условии, что любой n-поднабор данной системы гиперповерхностей пересекается дискретно. В статье [3] удалось частично ослабить последнее условие, а также подтвердить гипотезу для $m = n + 1$ гиперповерхностей:

Теорема 2. *Пусть $X = U_a$ — достаточно малая штейнова окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$. Тогда*

$$[\Gamma] \in H_n^*(X \setminus F_1 \cup \ldots \cup F_{n+1})$$

в том, и только том случае, когда Γ разделяет гиперповерхности $F_1, \ldots, F_{n+1}$.

Ограничения на геометрию пересечений гиперповерхностей, при которых обсуждаемая гипотеза подтверждена в [3], связаны с условием существования базы гомологий подгруппы $H_n^*(X \setminus F)$, состоящей из циклов $\Gamma_{\mathcal{J},a}$, соответствующих разбиениям $\mathcal{J}$, все подмножества которых, за исключением одного, являются одноэлементными. В докладе приводится пример системы гиперповерхностей, для которой подгруппа $H_n^*(X \setminus F)$ такой базы гомологий не имеет.

Пусть в сколь угодно малой окрестности начала координат в $\mathbb{C}^3$ задана следующая система гиперповерхностей:

$$F_1 = \{z\colon z_1 = 0\}, \quad F_2 = \{z\colon z_2 = 0\}, \quad F_3 = \{z\colon z_3 = 0\},$$
$$F_4 = \{z\colon z_1^3 - z_2 z_3 = 0\}, \quad F_5 = \{z\colon z_2^3 - z_1 z_3 = 0\}, \quad F_6 = \{z\colon z_3^3 - z_1 z_2 = 0\}.$$

Нетрудно проверить, что существует единственное разбиение

$$\mathcal{J} = \{\{1,4\},\{2,5\},\{3,6\}\},$$

для которого $Z_{\mathcal{J}} = \{0\}$. Соответствующий этому разбиению локальный цикл имеет вид

$$\Gamma_{\mathcal{J},0} = \left\{ \left|z_1(z_1^3 - z_2 z_3)\right| = \varepsilon_1,\ \left|z_2(z_2^3 - z_1 z_3)\right| = \varepsilon_2,\ \left|z_3(z_3^3 - z_1 z_2)\right| = \varepsilon_3 \right\}.$$

Предложение 1. *Цикл $\Gamma_{\mathcal{J},0}$ порождает локально разделяющую подгруппу $H_n^*(X \setminus F)$. Класс любого 3-цикла Γ, разделяющего гиперповерхности $F_1, \ldots, F_6$, принадлежит подгруппе $H_n^*(X \setminus F)$.*

Тем самым, для указанного примера гипотеза также подтверждается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Цих А.К. *Многомерные вычеты и их применение.* Новосибирск: Наука, 1988.
2. Южаков А.П. *Разделяющая подгруппа и локальные вычеты.* Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, вып. 6. С. 197–203.
3. Ульверт Р.В. *О циклах, разделяющих систему m гиперповерхностей в окрестности точки из $\mathbb{C}^n$.* Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. 2012. Т. 5, вып. 2. С. 276–282.

УДК 517.955

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ В ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ КОШИ

HYPERBOLIC FORMULAS IN ELLIPTIC CAUCHY PROBLEMS

Д. П. Федченко

Сибирский федеральный университет, Красноярск
fdp@bk.ru

Мы изучаем задачу Коши для уравнения Лапласа в цилиндрических областях с данными на части границы. Сводя исходную задачу к задаче Коши для волнового уравнения в комплексной области и используя гиперболическую теорию, мы получаем точные формулы для решения, обобщая тем самым классический подход Ханса Леви (1927).

Пусть $\mathcal{X}$ – ограниченная цилиндрическая область с кусочно-гладкой границей в $\mathbb{R}^n$, т.е. $\mathcal{X}$ является частью цилиндра $B \times \mathbb{R}$, ограниченной двумя поверхностями

$$x_n = b(x') \quad \text{и} \quad x_n = t(x'),$$

лежащими над множеством B, где B – ограниченная область с гладкой границей в пространстве $\mathbb{R}^{n-1}$ переменного $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Для простоты будем предполагать, что $t(x') > b(x')$ для всех $x' \in B$, случай $t(x') = b(x')$ для некоторых или для всех $x' \in \partial B$ не исключен. Зададим данные Коши на поверхности

$$\mathcal{S} := \{(x', t(x')) : x' \in B\},$$

которая предполагается вещественно-аналитической.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение с частными производными $\Delta u = f(x, u, \nabla u)$ в $\mathcal{X}$, где функция f вещественно-аналитическая на $\overline{\mathcal{X}} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Задача Коши для решений этого уравнения с данными на $\mathcal{S}$ может быть сформулирована следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{lll} \Delta u & = f(x, u, \nabla u) & \text{в } \mathcal{X}, \\ \ \ u & = u_0 & \text{на } \mathcal{S}, \\ \ \ u'_{x_n} & = u_1 & \text{на } \mathcal{S}. \end{array} \right. \tag{1}$$

Лемма 1. *Существует единственная вещественно-аналитическая в $\mathcal{X} \cup \mathcal{S}$ функция u, являющаяся решением задачи (1).*

Предположим, что u – вещественно-аналитическая в $\mathcal{X} \cup \mathcal{S}$ функция, удовлетворяющая (1). Для каждого фиксированного $x' \in B$, функция $u(x', x_n)$ может быть продолжена до голоморфной функции $u(x', x_n + \imath y_n)$ в некоторую комплексную окрестность интервала $(b(x'), t(x')]$. Будем считать, что эта окрестность является треугольником $T(x')$ с вершиной $b(x')$ и основанием $t(x') \pm \imath\varepsilon$ в комплексной плоскости $z_n = x_n + \imath y_n$. Обозначим через $U(x', x_n, y_n)$ продолженную функцию.

Так как функция $U(x', z_n)$ голоморфна в $T(x')$, сразу же получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^j U(x', x_n, y_n) = \left(-\imath\frac{\partial}{\partial y_n}\right)^j U(x', x_n, y_n)$$

для всех $j = 1, 2, \ldots$. Следовательно, задача Коши (1) для u может быть преобразована к задаче

$$\begin{cases} \Delta_{x'}U - U''_{y_n y_n} &= f(x', z_n, U, \nabla_{x'}U, -\imath U'_{y_n}), \quad x' \in B, z_n \in T(x'), \\ U(x', x_n, 0) &= u_0(x', z_n), \quad x' \in B, z_n = t(x'), \\ U'_{y_n}(x', x_n, 0) &= \imath u_1(x', z_n), \quad x' \in B, z_n = t(x'), \end{cases} \tag{2}$$

относительно новой неизвестной функции $U(x', x_n, y_n)$.

Рассмотрим случай $n = 2$ и $f = 0$.

$$\mathcal{X} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in (a, b),\ b(x_1) < x_2 < t(x_1)\},$$

где $B = (a, b)$ – ограниченный интервал, а b и t – гладкие функции переменного $x_1 \in (a, b)$. Обозначим через $\mathcal{S}$ кривую $\{(x_1, t(x_1)) : x_1 \in (a, b)\}$, являющуюся частью границы $\partial\mathcal{X}$.

Пусть даны дважды дифференцируемая функция $u_0(x_1, x_2)$ и дифференцируемая функция $u_1(x_1, x_2)$ переменного $x_1 \in (a, b)$, тогда функция

$$U = \frac{u_0(x_1 + y_2, x_2) + u_0(x_1 - y_2, x_2)}{2} + \frac{\imath}{2}\int_{x_1 - y_2}^{x_1 + y_2} u_1(x_1', x_2)\, dx_1', \tag{3}$$

заданная формулой Д'Аламбера, является решением задачи Коши (2) для волнового уравнения.

Пусть D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ переменного z, ограниченная лучами OA и OB, а также гладкой кривой $c = AB$, лежащей внутри угла BOA. Положим $\angle BOA = \alpha\pi$, где $0 < \alpha < 2$.

Теорема 1. *Если функция $u(z)$ голоморфна в D и непрерывна вплоть до границы, то формула*

$$u(z) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi\imath}\int_c u(\zeta) \exp N\left(\left(\frac{\zeta - \zeta_0}{z - \zeta_0}\right)^{1/\alpha} - 1\right)\frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

справедлива для всех z, лежащих на биссектрисе угла BOA, где ζ_0 – комплексное число, соответствующее вершине O угла.

Доказательство принадлежит Карлеману [1]. Насколько нам известно, это первая формула аналитического продолжения, использующая идею введения *гасящей* функции. Подобные формулы в комплексном анализе и теории эллиптических уравнений принято называть формулами Карлемана (см, [2], [3]).

Теорема 2. *Пусть $n = 2$. Если u является решением задачи Коши (1) в $\mathcal{X}$, вещественно-аналитическим вплоть до $\mathcal{S}$, то формула*

$$u(x) =$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon(x_1)}^{\varepsilon(x_1)} U(x_1, t(x_1), y_2) \exp N \left(\left(\frac{t(x_1) - b(x_1) + \imath y_2}{x_2 - b(x_1)} \right)^{1/\alpha} - 1 \right) \frac{dy_2}{t(x_1) - x_2 + \imath y_2}$$

справедлива для всех $x \in \mathcal{X}$, где функция $U(x_1, x_2, y_2)$ задана формулой (3).

Доказательство содержится в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Carleman T. *Les fonctions quasianalytiques*, Paris: Gauthier-Villars. 1926.
2. Айзенберг Л.А. *Формулы Карлемена в комплексном анализе. Первые приложения*, Новосибирск: Наука. – 1990.
3. Tarkhanov N. *The Cauchy problem for solutions of elliptic equations*, Akademie Verlag, Berlin, 1995.
4. Fedchenko D.P., Tarkhanov N., *Hyperbolic formulas in elliptic Cauchy problems*, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 3:4 (2010), 419–432.

УДК 517.968

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С СУММАРНО-РАЗНОСТНЫМИ ЯДРАМИ НА ПОЛУОСИ

ON THE SOLVABILITY OF SOME CLASSES OF NON-LINEAR INTEGRAL AND INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SUM-DIFFERENCE KERNELS ON A SEMIAXIS

А. Х. Хачатрян, Х. А. Хачатрян

Отдел методов мат. физики Института математики НАН Армении
Aghavard@hotbox.ru, Khach82@rambler.ru

Доклад посвящен вопросу разрешимости в определенных функциональных пространствах для следующих классов нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений:

1. Интегральные уравнения:

$$f(x)=\int_0^\infty K_0(x-t)N_0(t,f(t))dt+\int_0^\infty K_1(x+t)N_1(t,f(t))dt,\quad x>0, \tag{1}$$

$$\varphi(x)=-\int_0^\infty N_0(t,\varphi(t))d_tF_0(x-t)+\int_0^\infty N_1(t,\varphi(t))d_tF_1(x+t),\quad x>0. \tag{2}$$

2. Интегро-дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi}{dx}+\lambda\psi(x)=\displaystyle\int_0^\infty T_0(x-t)H_0(t,\psi(t))dt+\int_0^\infty T_1(x+t)H_1(t,\psi(t))dt,\quad x>0 \\ \psi(0)=0. \end{cases} \tag{3}$$

Указанные классы уравнений, кроме теоретического интереса, имеют непосредственное применение в кинетической теории газов, в теории марковских процессов (уравнения (1) и (2)), в эконометрике, а именно в теории распределения национального дохода в однопродуктовой экономике (задача (3)).

Накладывая некоторые условия на ядра и на N_0, N_1, H_0, H_1 доказываются теоремы существования решений в пространствах $L_1(\mathbb{R}^+)\cap L_\infty^0(\mathbb{R}^+)$ и

$$L_\infty^0(\mathbb{R}^+)=\{\varphi:\varphi\in L_\infty(\mathbb{R}^+):\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=0\}.$$

УДК 517.55

ОБ ОБЛАСТЯХ СХОДИМОСТИ РЯДОВ ИЗ ОДНОРОДНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ В $\mathbb{R}^n$

ON THE CONVERGENCE DOMAINS OF SERIES OF HOMOGENEOUS HARMONIC POLYNOMIALS IN $\mathbb{R}^n$

О. В. Ходос

Сибирский федеральный университет, Красноярск
khodos_olga@mail.ru

Пусть S — единичная сфера в $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле.

Рассмотрим полную ортонормированную на $\mathcal{L}^2(S)$ систему однородных гармонических многочленов $\{P_{k,s}(x)\}$, k — степень многочлена, а s — номер многочлена (степени k) из этого базиса, $s = 1, \ldots, \sigma(k)$, где $\sigma(k) = \dfrac{(n+2k-2)(k+n-3)!}{k!(n-2)!}$.

Будем рассматривать ряды вида

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=1}^{\sigma(k)} a_{k,s} P_{k,s}(x), \tag{1}$$

сходящиеся в каждой точке x из некоторой ограниченной области G к функции $F(x)$. Этот ряд мы можем переписать в виде

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\sigma(k)} a_{k,s} P_{k,s}(x) \right) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(x), \tag{2}$$

где $Y_k(x) = \sum\limits_{s=1}^{\sigma(k)} a_{k,s} P_{k,s}(x)$ — однородный гармонический многочлен степени k.

Сходимость ряда (1) (или (2)) в G налагает некоторые дополнительные условия на F и на G. А именно, если ряд (1) сходится в G, то эта сходимость абсолютная и его область сходимости звездная и симметричная относительно нуля.

В дальнейшем будем предполагать, что G симметричная относительно нуля и сильно звездная, т.е. области $G_r = \{x : \ x = ry, \ y \in G\}$ относительно компактны в G для всех r, $0 < r < 1$.

Будем также требовать, что во всех областях G_r, $0 < r < 1$, равномерно сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |Y_k(x)|. \tag{3}$$

Условие (3) гарантирует, что $F(x)$ гармонична в G.

Рассмотрим множество в $\mathbb{C}^n$ вида $G^{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C}^n : \ z = \zeta x, \ x \in G, \ \zeta \in \Delta\}$, где Δ открытый единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с центром в нуле. Множество $G^{\mathbb{C}}$ относительно компактно в $\mathbb{C}^n$.

Ряды (1) (или (2)) определяют тогда некоторое продолжение $F^{\mathbb{C}}(z)$ функции F в $G^{\mathbb{C}}$. В силу наложенных условий функция $F^{\mathbb{C}}$ непрерывна на $G^{\mathbb{C}}$ и голоморфна по ζ при фиксированном $x \in G$ в Δ $(z = \zeta x)$.

Обозначим

$$d_k(G) = \sup_{x \in G} |Y_k(x)| \quad \text{и} \quad d_{k,s}(G) = \sup_{x \in G} |P_{k,s}(x)|.$$

Теорема 1. *Для того, чтобы ряд (2) сходился в G, а ряд (3) равномерно сходился на любом множестве G_r, $0 < r < 1$, необходимо и достаточно, чтобы ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(G) r^k$$

сходился для любого $r < 1$, т.е. выполнялось условие

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{d_k(G)} \leqslant 1.$$

Рассмотрим более сильное условие сходимости. Пусть ряд

$$\sum_{k,s} |a_{k,s}||P_{k,s}(x)| \tag{4}$$

сходится равномерно в любой области G_r, $0 < r < 1$.

Следствие 1. *Для того чтобы ряд (4) сходился равномерно в любой области G_r, $0 < r < 1$, необходимо и достаточно чтобы ряд*

$$\sum_k r^k \left(\sum_s |a_{k,s}| d_{k,s} \right)$$

сходился для всех $r < 1$.

Следствие 2. *Для того чтобы ряд (4) сходился равномерно в любой области G_r, $0 < r < 1$, необходимо и достаточно чтобы*

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{\max_{1 \leqslant s \leqslant \sigma(k)} |a_{k,s}| d_{k,s}} \leqslant 1.$$

Теорема 2. *Для того чтобы ряд (4) сходился равномерно в любой области G_r, $0 < r < 1$, необходимо и достаточно чтобы ряд*

$$\sum_{k,s} a_{k,s} d_{k,s} P_{k,s}$$

сходился абсолютно в шаре $B = \{x : \ |x| < 1\}$ и равномерно на любом компакте из этого шара.

УДК 517.977.56

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ НУЛЬ УПРАВЛЯЕМОСТИ КОЛЕБАНИЯМИ НЕОДНОРОДНОЙ СТРУНЫ, ВЫЗВАННЫМИ ИМПУЛЬСНЫМИ ВОЗДЕЙСТВИЯМИ

ON OPTIMAL BOUNDARY NULL–CONTROLLABILITY FOR NON–HOMOGENEOUS STRING VIBRATIONS UNDER IMPULSIVE BOUNDARY PERTURBATIONS

A. Khurshudyan

Yerevan State University, Yerevan
AsaturKhurshudyan@yandex.ru

We are concerned here with an optimal boundary control problem for the wave equation with $x-$dependent variable coefficients [3–6]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[T_0(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right]-\rho(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=F(x,t);\ x\in[0;l],\ t\in[t_0;T]\,, \tag{1}$$

where $F(x,t)$, $\rho(x)$ and $T_0(x)$ are realizable functions, such that the usual existence theorems for physically acceptable solution $w=w(x,t)$ hold.

It is assumed, that the following boundary conditions are given:

$$w(0,t)=u(t),\ \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right|_{x=l}=\sum_{j=1}^{n}P_j\delta(t-t_j);\ t\in[t_0;T], \tag{2}$$

where $t_0\le t_j<t_{j+1}\le T$ $(j=\overline{1;n-1})$, $\delta(t)$ is Dirac‘s delta–function. It is also supposed, that the control process under study is carried out by control impacts $u(t)$, acting at the left end–point of the string.

It should be noted, that the system (1)-(2) particularly describes forced vibrations of a non-homogeneous string of length l and density $\rho(x)$, caused by external impact $F(x,t)$ and simultaneously impulsive perturbations P_j $(j=\overline{1;n})$, concentrated at the right end–point of the string and acting at discrete moments $t_j\in[t_0,T]$, which are controlled by control actions $u(t)$ acting at the left–end point of the string, at that $T_0(x)$ is the tensile force of the string, $w(x,t)$ is the deflection of the string from equilibrium state.

For solvability of boundary-value problem (1)-(2) it is necessary to consider also some initial data. Let them be the following:

$$w(x,t_0)=w_0(x),\ \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=t_0}=\dot{w}_0(x);\ x\in[0;l]. \tag{3}$$

The statement of the problem under consideration is to define the optimal law for realization of boundary control function $u(t)$, which provides for solution of equation (1), satisfying boundary and initial conditions (2) and (3) respectively, the following end–point null–condition during finite time interval $[t_0,T]$:

$$w(x,T) \equiv 0, \ \left.\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\right|_{t=T} \equiv 0; \ x \in [0;l] \tag{4}$$

and minimizes the control process optimality criterion

$$\kappa[u] = \int_{t_0}^{T} |u(t)|dt. \tag{5}$$

By applying generalized Fourier integral transform with respect to variable t to (1) and (2), taking into account (3) and (4), we will respectively derive:

$$\frac{d}{dx}\left[T_0(x)\frac{d\overline{w}}{dx}\right] + \sigma^2\rho(x)\overline{w} = G(x,\sigma); \ x \in [0,l], \ \sigma \in (-\infty,\infty), \tag{6}$$

$$\overline{w}(0,\sigma) = \overline{u}(\sigma), \ \left.\frac{d\overline{w}(x,\sigma)}{dx}\right|_{x=l} = \sum_{j=1}^{n} P_j e^{i\sigma t_j}, \tag{7}$$

where σ is the spectral parameter of Fourier transform,

$$\overline{u}(\sigma) = \int_{t_0}^{T} u(t)e^{i\sigma t}dt; \ G(x,\sigma) = G_1(x,\sigma) + i\cdot G_2(x,\sigma),$$

$$G_p(x,\sigma) = \int_{t_0}^{T} F(x,t)\{\cos;\sin\}(\sigma t)dt - \rho[\dot{w}_0\{\cos;\sin\}(\sigma t_0) +$$

$$\sigma w_0\{\sin; -\cos\}(\sigma t_0)], \ p = 1,2.$$

We suppose, that the functions $\rho(x) > 0$ and $T_0(x)$ satisfy conditions for existence of a non-trivial (non-eventually zero) oscillating solution of equation (6) with respect to x variable (see e.g. [7, 8] and the references cited therein, although one can notice, that there is not any restrictions on the sign of the function $T_0(x)$).

Without loss of generality we assume, that the boundary control function $u(t)$ is a finite with support $[t_0, T]$. Than, using finite control method [2] after necessary transformations and simplifications, keeping in view (7), the solution of the problem under investigation has been reduced to the following interpolation problem to defining the Fourier transform of unknown function:

$$\overline{u}(\alpha_k) = -i\frac{e^{-i(\mu(l,\alpha_k)-\mu(0,\alpha_k))}}{\mu'(l,\alpha_k)} \cdot \left[\sum_{j=1}^{n} P_j e^{i\alpha_k t_j} - \Omega(l,\alpha_k)\right] := M_{1k} + i\cdot M_{2k}, \tag{8}$$

$$\left(\alpha_k = \sigma_k + i\tau_k; \ \sigma_k, \ \tau_k \in (-\infty,\infty); \ k = 0,1,2,...\right)$$

where the following notations are introduced:

$$\Omega(x,\alpha) = \int_0^x \left[\lambda'(x,\alpha)e^{i(\lambda(x,\alpha)-\lambda(\xi,\alpha))} - \mu'(x,\alpha)e^{i(\mu(x,\alpha)-\mu(\xi,\alpha))}\right] \frac{G(\xi,\alpha)}{\lambda'(\xi,\alpha)-\mu'(\xi,\alpha)} d\xi,$$

α_k are the roots of characteristic transcendental equation

$$e^{i(\mu(l,\alpha_k)-\mu(0,\alpha_k)-(\lambda(l,\alpha_k)-\lambda(0,\alpha_k))} = \frac{\lambda'(l,\alpha_k)}{\mu'(l,\alpha_k)},$$

here $\lambda = \lambda(x,\sigma)$ and $\mu = \mu(x,\sigma)$ are non–trivial real solutions of Riccati differential equation [3, 6, 7] $\nu^2 + T_0\nu' + \sigma^2\rho T_0 = 0$, where $\nu(x,\sigma) = i \cdot T_0(x)\frac{d}{dx}\{\lambda;\mu\}$, defining oscillating solution of (6), such that $\lambda'(x,\sigma) \neq \mu'(x,\sigma)$ for all $x \in [0,l]$ and $\sigma \in (-\infty,\infty)$.

Than, by separating real and imaginary parts in both sides of equality (8), one can reduce it to the following system of moments problem in the space $\mathrm{L}^\infty[t_0,T]$ under criterion (5), with respect to unknown function:

$$\int_{t_0}^{T} u(t)e^{-\tau_k t}\cos(\sigma_k t)dt = M_{1k}; \ \int_{t_0}^{T} u(t)e^{-\tau_k t}\sin(\sigma_k t)dt = M_{2k} \ (k = 0,1,2,...). \quad (9)$$

Hereby, the solution of the boundary control problem under investigation has been reduced to interpolation problem (8) with respect to Fourier transform of unknown boundary control function or to system of moments problem (9) with respect to the very unknown function. Here the solution of the problem has been determined explicitly by means of solution of system of moments problem (9) using the well-known method for solving moments problem in the case of integral constraint set out in [1], at that unknown function has the following form:

$$u^o(t) = \sum_{k,s} u^o_{ks} \cdot \delta(t - t^o_{ks}); \ k \in \mathrm{K}, \ s \in \mathrm{S} \quad (10)$$

where the control actions u^o_{ks} are determined from system

$$\sum_{s\in\mathrm{S}} u^o_{ks}e^{-\tau_k t^o_{ks}}\cos(\sigma_k t^o_{ks}) = M_{1k}; \ \sum_{s\in\mathrm{S}} u^o_{ks}e^{-\tau_k t^o_{ks}}\sin(\sigma_k t^o_{ks}) = M_{2k}, \ k \in \mathrm{K},$$

with additional condition

$$\mathrm{sgn} u^o_{ks} = \mathrm{sgn}\left[\cos(\sigma_k t^o_{ks} - \theta_k)\right]; \ \theta_k = \arctan\frac{M_{2k}}{M_{1k}},$$

the moments of controls application t^o_{ks} are the real positive roots of transcendental equation

$$\tau_k\left[M^2_{1k} + M^2_{2k}\right]^{-\frac{1}{2}} e^{-\tau_k t} = 0,$$

K and S are the sets of indexes k and s respectively, for which

$$\{t^o_{ks}; \sigma_k t^o_{ks}\}_{k\in \mathrm{K},\ s\in \mathrm{S}} \subset [t_0; T].$$

At the end let us note, that since the necessary and sufficient condition for solvability of moments problem (10) is satisfied [1], i.e.,

$$\sqrt{M_{1k}^2 + M_{2k}^2} e^{-\tau_k t^o_{ks}} > 0,$$

for all $k \in \mathrm{K}$ and $s \in \mathrm{S}$, therefore the system (1)-(2) is null-controllable by means of the space $\mathrm{L}^1[t_0, T]$ for all initial and boundary data (3) and (4).

ЛИТЕРАТУРА

1. N.N. Krasovskii *Motion Control Theory.* Moscow, Nauka Publ. 1968, 476 p. (in Russian)
2. A.G. Butkovskii *Control Methods for Systems with Distributed Parameters.* Moscow, Nauka Publ. 1975, 568 p. (in Russian)
3. A. Khurshudyan *On Optimal Boundary Control of Non-Homogeneous String Vibra-tions under Impulsive Perturbations.* // Abstracts of Annual Session dedicated to 1400th anniversary of Anania Shirakatsi, Yerevan. 2012. P. 71-73.
4. K.S. Khalina *Controllability Problems for the Non-homogeneous String that is Fixed at the Right-end Point with Dirichlet Boundary Control at the Left-end point.* // Journal of Math. Phys., Anal. and Geom., 7. 2011. Vol. 1. P. 34–58.
5. K.S. Khalina *On the Newmann Boundary Controllability for the Non-homogeneous String on the Segment.* // Journ. of Math. Phys., Anal. and Geom., 7. 2011. Vol. 4. P. 333–351.
6. A.V. Borovskikh *Boundary Control Formulas for Inhomogeneous String.* I(II). // Diff. Eq., 43. 2007. Vol. 1 (5). P. 64-89 (640-649).
7. Man Kam Kwong, A. Zettl *Integral inequalities and second order linear oscillation.* // Journ. of Diff. Eq., Vol. 45. 1982. P. 16-33.
8. M.A. El-Sayed *An Oscillation Criterion for a Forced Second–Order Linear Differential Equation.* // Proceedings of the American Mathematical Society, 118. 1993. Vol. 3. P. 813–817.

УДК 517.552,515.165

СМЕШАННЫЕ СТРУКТУРЫ ХОДЖА НА ДОПОЛНЕНИЯХ К НАБОРАМ КООРДИНАТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

MIXED HODGE STRUCTURES ON COMPLEMENTS TO COORDINATE SUBSPACE ARRANGEMENTS AND INTEGRAL REPRESENTATIONS

Ю. В. Элияшев
Сибирский федеральный университет, Красноярск
eliyashev@mail.ru

Пусть $\mathcal{K}$ – симплициальный комплекс на множестве вершин $[n] = \{1,\ldots,n\}$. Определим по $\mathcal{K}$ набор комплексных координатных подпространств в $\mathbb{C}^n$:

$$Z_{\mathcal{K}} := \bigcup_{\sigma\notin\mathcal{K}} L_\sigma,$$

где $\sigma = \{i_1,\ldots,i_m\} \subseteq [n]$ — подмножество в $[n]$ (не порождающее симплекс в $\mathcal{K}$), а

$$L_\sigma = \{z \in \mathbb{C}^n : z_{i_1} = \cdots = z_{i_m} = 0\}.$$

Отметим, что любой набор комплексных координатных плоскостей в $\mathbb{C}^n$ коразмерности больше 1 может быть задан таким образом.

В работе [1] были вычислены когомологии $\mathbb{C}^n\setminus Z_{\mathcal{K}}$, а также, исходя из топологических соображений, была введена биградуировка на кольце $H^*(\mathbb{C}^n\setminus Z_{\mathcal{K}})$ (когомологии с коэффициентами в $\mathbb{Z}$). Приведем здесь этот результат.

Определим кольцо $\mathbb{Z}[\mathcal{K}] = \mathbb{Z}[v_1,\ldots,v_n]/\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$, где $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$ — однородный идеал, порожденный мономами $v_\sigma = \prod_{i\in\sigma} v_i$, для которых $\sigma \notin \mathcal{K}$: $\mathcal{I}_{\mathcal{K}} = (v_{i_1}\cdot\ldots\cdot v_{i_m} : \{i_1,\ldots,i_m\} \notin \mathcal{K})$.

Рассмотрим дифференциальную биградуированную факторалгебру $(R(\mathcal{K}),\delta_R)$, полагая $R_{\mathcal{K}} := (\Lambda[u_1,\ldots,u_n] \otimes \mathbb{Z}[\mathcal{K}])/\mathcal{J}$, где $\Lambda[u_1,\ldots,u_n]$ — внешняя алгебра, $\mathcal{J}$ — идеал порожденный мономами $v_i^2, u_i \otimes v_i, i = 1,\ldots,n$. При этом образующим v_i, u_i приписываются бистепени

$$\operatorname{bideg} v_i = (1,1), \operatorname{bideg} u_i = (1,0),$$

а дифференциал задан на образующих следующим образом: $\delta_R u_i = v_i, \delta_R v_i = 0$.

Однородную компоненту алгебры $R_{\mathcal{K}}$ бистепени (p,q) обозначим $R^{p,q}_{\mathcal{K}}$. Дифференциал δ_R согласован с биградуировкой: $\delta_R(R^{p,q}_{\mathcal{K}}) \subseteq R^{p,q+1}_{\mathcal{K}}$. Рассмотрим комплекс

$$\cdots \xrightarrow{\delta_R} R^{p,q-1}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\delta_R} R^{p,q}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\delta_R} R^{p,q+1}_{\mathcal{K}} \xrightarrow{\delta_R} \ldots,$$

его когомологии обозначим $H^{p,q}(R_{\mathcal{K}})$. Ясно, что когомологии $R_{\mathcal{K}}$ изоморфны

$$H^s(R_{\mathcal{K}}) = \bigoplus_{p+q=s} H^{p,q}(R_{\mathcal{K}}).$$

Теорема 1 (Бухштабер В.М., Панов Т.Е. [1]). *Кольцо когомологий* $H^*(\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}})$ *изоморфно кольцу* $H^*(R_{\mathcal{K}})$.

Основой результат нашей работы состоит в том, что приведенная выше биградуировка естественно возникает на кольце $H^*(\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}, \mathbb{C})$ как конструкция из алгебраической геометрии, а именно, биградуировка может быть описана через смешанную структуру Ходжа на $H^*(\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}, \mathbb{C})$.

Обозначим через W_l возрастающую (весовую) фильтрацию на $H^*(\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}, \mathbb{C})$, а через F^k убывающую фильтрацию Ходжа на $H^*(\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}, \mathbb{C})$. Определения этих фильтраций см., например, в [2]. Имеет место следующая

Теорема 2.

$$W_l H^s(\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{\substack{p+q=s \\ p-q \leq l-s}} H^{p,q}(R_{\mathcal{K}}, \mathbb{C}),$$

$$F^k H^s(\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}, \mathbb{C}) \simeq \bigoplus_{\substack{p+q=s \\ p \geq k}} H^{p,q}(R_{\mathcal{K}}, \mathbb{C}).$$

В работе [3] был поставлен вопрос построения интегральных представлений голоморфных функций, ядра которых имеют сингулярности на наборах комплексных координатных подпространств. Обозначим U единичный поликруг в $\mathbb{C}^n$:

$$U = \{z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| < 1, i = 1, \ldots, n\}.$$

Частичный ответ на обозначенный выше вопрос дает следующая

Теорема 3. *Для любого нетривиального элемента из* $F^n H^s(\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}, \mathbb{C})$ *существует представитель в виде замкнутой* $(n, s-n)$*-формы* ω *и* s*-мерный цикл* γ *в* $\mathbb{C}^n \setminus Z_{\mathcal{K}}$, *носитель которого лежит на границе* U, *такие, что для всякой голоморфной в окрестности* U *функции* f *имеет место интегральное представление*

$$f(z) = \int_\gamma f(\zeta)\omega(\zeta - z), \text{ где } z \in U.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бухштабер В.М., Панов Т.Е. *Торические действия в топологии и комбинаторике.* - М.: МЦНМО, 2004.
2. Куликов Вик.С., Курчанов П. Ф., *“Комплексные алгебраические многообразия: периоды интегралов, структуры Ходжа”, Алгебраическая геометрия – 3*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, 36, ВИНИТИ, М., 1989, 5–231
3. Shchuplev A., Tsikh A.K., Yger A. *Residual kernels with singularities on coordinate planes* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 2006, Vol. 253.

УДК 514.7

ПЛОСКИЕ ТКАНИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРОЕКТИВНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

PLANAR WEBS AND ANALYTIC PROJECTIVE SURFACES

Alain Hénaut

Institut de Mathématiques, Université de Bordeaux et CNRS, France
Alain.Henaut@math.u-bordeaux1.fr

Web geometry deals with families of foliations in general position. In the planar case locally in $\mathbb{C}^2$ or globally on

$$\mathbb{P}^2 := \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$$

, a d-planar web $\mathcal{W}(d)$ is given by the generic family of integral curves of respectively an analytic or an algebraic differential equation of the first order $F(x, y, y') = 0$ with degree d. The main numerical invariant of such a $\mathcal{W}(d)$ is the rank of a local system given by the *abelian relations* of $\mathcal{W}(d)$, that is special relations between the normals of its leaves. This rank is bounded by

$$\pi_d := \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

and the previous bound is optimal from Abel's addition theorem.

A d-planar web $\mathcal{W}(d)$ with $d \geq 4$ in a neighborhood of $0 \in \mathbb{C}^2$, with maximum rank, gives rise to an analytic map

$$\mathfrak{u} : (\mathbb{C}^2, 0) \longrightarrow \check{\mathbb{P}}^{\pi_d - 1} := G(\pi_d - 2, \mathbb{P}^{\pi_d - 1})$$

which defines an analytic projective surface. In order to approach classification of such a $\mathcal{W}(d)$, some properties of this surface will be discussed. Characterizations of such a surface will be presented by using in particular their $(d-4)$-principal curves that we will define. Links with the usual Veronese surface will be also given.

Methods and tools used illustrate the rich interplay between differential geometry and algebraic geometry.

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

ON SOLVABILITY OF MIXED VALUE PROBLEM FOR NONLINEAR PSEUDOHYPERBOLIC EQUATION OF THE FIFTH ORDER

Т. К. Юлдашев

Сибирский государственный аэрокосмический университет, Красноярск
tursunbay@rambler.ru

В области D рассматривается нелинейное псевдогиперболическое уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u(t,x)-\nu\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)+\mu\frac{\partial^5 u(t,x)}{\partial t\,\partial x^4}+\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4}=f\left(t,x,u(t,x)\right) \tag{1}$$

с начальными

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(t,x)_{|t=0}=\varphi_2(x) \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=\int\limits_0^l K(y)u(t,y)\,dy=\int\limits_0^l K(y)u_{yy}(t,y)\,dy=0, \tag{3}$$

где $f\left(t,x,u\right)\in C\left(D\times R\right)$, $\varphi_j(x)\in C^5(D_l)$, $\varphi_j(x)_{|x=0}=\varphi_j''(x)_{|x=0}=\int\limits_0^l K(y)\varphi_j(y)dy=$ $=\int\limits_0^l K(y)\varphi_j''(y)dy=0$, $j=1,2$, $K(y)\in C^1\left(D_l\right)$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$, $0<\nu$, μ — малые параметры.

Функция $K(y)$ такая, что дифференциальное выражение $\frac{\partial^4}{\partial x^4}$ при граничных условиях (3) порождает положительно определенный самосопряженный оператор с чистоточечным спектром.

Используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1)-(3) в виде предела

$$u(t,x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N a_i(t)\,b_i(x). \tag{4}$$

Пусть $b_i(x)$ — собственные функции дифференциального оператора $\frac{\partial^4}{\partial x^4}$, удовлетворяющие граничным условиям

$$b_i(0)=b_i''(0)=\int\limits_0^l K(y)b_i(y)dy=\int\limits_0^l K(y)b_i''(y)dy=0$$

и обладающие свойством $b_i^{(IV)}(x)=\lambda_i^4 b_i(x)$, а λ_i^4 — соответствующие собственные значения данного оператора.

Определение 1. *Если функция* $u(t,x) \in E_p(D)$ *удовлетворяет следующему интегральному тождеству*

$$\int_0^T \int_0^l \Big\{ u(t,y) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} F(t,y) - \nu \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial y^2} F(t,y) - \mu \frac{\partial^5}{\partial t \partial y^4} F(t,y) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} F(t,y) \right] -$$

$$- f\left(t,y,u(t,y)\right) F(t,y) \Big\} dydt =$$

$$\int_0^l \varphi_1(y) \left[\frac{\partial}{\partial t} F(t,y) - \nu \frac{\partial^3}{\partial t\, \partial y^2} F(t,y) + \mu \frac{\partial^4}{\partial y^4} F(t,y) \right]_{t=0} dy -$$

$$- \int_0^l \varphi_2(y) \left[F(t,y) - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(t,y) \right]_{t=0} dy \quad (5)$$

для любого $F(t,x) \in W_p^{(2)}(D)$, *то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1)-(3).*

Теорема 1. *Если* $\lambda_i^4 \mu^2 - 4\lambda_i^2 \nu - 4 < 0$, *то коэффициенты разложения* $a_i(t)$ *формального решения смешанной задачи (1) – (3) удовлетворяют следующей системе нелинейных интегральных уравнений (СНИУ):*

$$a_i(t) = W_i(t) + \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{j=1}^N a_j(s) b_j(y)\right) G_i(t,s) b_i(y) dyds, \quad (6)$$

где

$$W_i(t) = \exp\Big\{ -\frac{1}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu)t \Big\} \Big[\varphi_{1i} \cos \omega_{2i}(\nu,\mu) \frac{t}{2} +$$

$$+ \frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\mu)} \left(\varphi_{2i} + \frac{\varphi_{1i}}{2} \omega_{1i}(\nu,\mu) \right) \sin \omega_{2i}(\nu,\mu) \frac{t}{2} \Big],$$

$$G_i(t,s) = \frac{2 \exp\left\{ -\omega_{1i}(\nu,\mu) \frac{t-s}{2} \right\} \sin \omega_{2i}(\nu,\mu) \frac{t-s}{2}}{\omega_{0i}(\nu) \Big[\omega_{2i}(\nu,\mu) + \omega_{1i}(\nu,\mu) \sin \omega_{2i}(\nu,\mu) s \Big]},$$

$$\omega_{0i}(\nu) = 1 + \lambda_i^2 \nu, \; \omega_{1i}(\nu,\mu) = \frac{\lambda_i^4 \mu}{\omega_{0i}(\nu)}, \; \omega_{2i}(\nu,\mu) = \frac{\lambda_i^2 \sqrt{4\omega_{0i}(\nu) - \lambda_i^4 \mu^2}}{\omega_{0i}(\nu)}.$$

Доказательство. Приближенное решение смешанной задачи (1) — (3) ищем в виде $u^N(t,x) = \sum_{i=1}^N a_i(t) b_i(x)$. Так как $F = F_m(t,x) = h(t) b_m(x) \in W_p^k(D)$, где $0 \neq h(t) \in C(D_T)$, то с учетом того, что функции $b_i(x)$ полны и ортонормированы в $L_p(D_l)$ из (5) следует

$$\int_0^t \Big[a_i(s) \left(h''(s) + \lambda_i^2 \nu h''(s) + \lambda_i^4 \mu h'(s) + \lambda_i^4 h(s) \right) -$$

$$-\int_0^l f\left(s,y,\sum_{j=1}^N a_j(s)b_j(y)\right)h(s)b_i(y)dy\Big]ds=0.$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$a_i''(t)+\omega_{1i}(\nu,\mu)a_i'(t)+\omega_{1i}(\nu,1)a_i(t)=\frac{1}{\omega_{0i}(\nu)}\int_0^l f\left(t,y,\sum_{j=1}^N a_j(t)b_j(y)\right)b_i(y)dy. \quad (7)$$

Система (7) решается методом вариации произвольных постоянных и при этом используются начальные условия $a_i(0)=\varphi_{1i}$, $a_i'(0)=\varphi_{2i}$. Тогда из (7) придем к СНИУ (6).

Рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$a_i^0(t)=W_i(t),\ a_i^{k+1}(t)=W_i(t)+$$
$$+\int_0^t\int_0^l f\left(s,y,\sum_{j=1}^N a_j^k(s)b_j(y)\right)G_i(t,s)b_i(y)dyds,\ k=0,1,2,\ldots. \quad (8)$$

Теорема 2. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\lambda_i^{4n}\mu^2-4\lambda_i^2\nu-4<0$;

2. $\int\limits_0^T ||f\left(t,x,\sum_{j=1}^N a_j^0(t)b_j(x)\right)||_{L_p(D_l)}dt\le\Delta<\infty$,

3. $f\,(t,x,u)\in Lip\Big\{L(t,x)_{|\,u}\Big\}$, $0<\int\limits_0^l ||L(t,y)\,||_{L_p(D_l)}dy<\infty$;

4. $||W(t)\,||_{B_p^N(T)}<\infty$.

Тогда СНИУ (6) имеет единственное решение в пространстве $B_p^N(T)$.

Доказательство. Используем метод последовательных приближений. В силу условий теоремы, из (8) по индукции получаем следующие оценки:

$$\|a^1(t)-a^0(t)\|_{B_p(T)}\le M_1M_2l^{\frac{1}{q}}\Delta, \quad (9)$$

где $M_1=\|G(t,s)\|_{B_p^N(T)}$, $M_2=\|b(x)\|_{B_q^N(l)}$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$;

$$\|a^{k+1}(t)-a^k(t)\|_{B_p(T)}\le l^{\frac{k+1}{q}}M_1^{k+1}M_2^{2k+1}\Delta\frac{\left[\int\limits_0^l ||L(t,y)\,||_{L_p(D_l)}dy\right]^k}{k!}. \quad (10)$$

Существование решения СНИУ (6) следует из справедливости оценок(9) и (10), так как при $k \to \infty$ последовательность функций $\{a^k(t)\}_{k=1}^{\infty}$ сходится равномерно по t к функции $a(t) \in B_p^N(T)$. Предполагая, что СНИУ (6) имеет два решения, для их разности $a(t)$ и $\vartheta(t) \in B_p^N(T)$ имеем оценку

$$\|a(t) - \vartheta(t)\|_{B_p^N(T)} \leq M_1 M_2^2 l^{\frac{1}{q}} \int_0^t \|L(s,x)\|_{L_p(D_l)} \|a(s) - \vartheta(s)\|_{B_p^N(T)} ds \,. \qquad (11)$$

Из применения неравенства Гронуолла-Беллмана к оценке (11) следует, что

$$\|a(t) - \vartheta(t)\|_{B_p^N(T)} \equiv 0 \,.$$

Подстановка решения СНИУ (6) в ряд (4) дает формальное решение смешанной задачи (1)-(3):

$$u(t,x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \Big[W_i(t) + \int_0^t \int_0^l f\left(s, y, \sum_{j=1}^{N} a_j(s) b_j(y)\right) b_i(y) G_i(t,s) dy ds \Big] b_i(x). \quad (12)$$

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2 и* $||W(t)||_{B_p(T)} < \infty$. *Если* $a(t) \in B_p^N(T)$ *является решением СНИУ (6), то предел (12) сходится и дает обобщенное решение смешанной задачи (1)-(3).*

Доказательство теоремы основано на том факте, что $\lim_{N\to\infty} V_N = 0$, где

$$V_N = \int_0^T \int_0^l \Big\{ u^N(t,y) \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} F(t,y) - \nu \frac{\partial^4}{\partial t^2 \partial y^2} F(t,y) - \mu \frac{\partial^5}{\partial t \partial y^4} F(t,y) + \frac{\partial^4}{\partial y^4} F(t,y) \right] -$$

$$-f\left(t, y, u^N(t,y)\right) F(t,y) \Big\} dy dt -$$

$$-\int_0^l \varphi_1^N(y) \left[\frac{\partial}{\partial t} F(t,y) - \nu \frac{\partial^3}{\partial t \, \partial y^2} F(t,y) + \mu \frac{\partial^4}{\partial y^4} F(t,y) \right]_{t=0} dy +$$

$$+\int_0^l \varphi_2^N(y) \left[F(t,y) - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} F(t,y) \right]_{t=0} dy \,.$$

УДК 517.95

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ПОРЯДКА

ON SOLVABILITY OF INVERSE PROBLEM FOR NONLINEAR PSEUDOHYPERBOLIC EQUATION OF THE FIFTH ORDER

Т. К. Юлдашев, К. Х. Шабадиков

Сибирский государственный аэрокосмический университет, Красноярск
Ферганский государственный университет, Фергана, Узбекистан
tursunbay@rambler.ru, konak.shabadikov@mail.ru

В области D рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u(t,x)-\nu\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}\right)+\mu\frac{\partial^5 u(t,x)}{\partial t\,\partial x^4}+\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x^4}=f\left(t,x,u(t,x),v(t-\tau)\right) \quad (1)$$

с начальными

$$u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\ \frac{\partial}{\partial t}u(t,x)_{|t=0}=\varphi_2(x), \quad (2)$$

граничными

$$u(t,x)_{|x=0}=u(t,x)_{|x=l}=u_{xx}(t,x)_{|x=0}=u_{xx}(t,x)_{|x=l}=0 \quad (3)$$

и дополнительными условиями

$$u(t,x_0)=\psi(t),\ 0<x_0<l, \quad (4)$$

$$v(t)=\eta(t),\ t\in E_0, \quad (5)$$

где $f\left(t,x,u,v\right)\in C\left(\overline{D}\times R\times U_0\right)$, $\varphi_j(x)\in C^5(\overline{D}_l)$, $\varphi_j(x)_{|x=0}=\varphi_j''(x)_{|x=0}=\varphi_j(x)_{|x=l}=\varphi_j''(x)_{|x=l}=0$, $j=1,2$, $\psi(t)\in C^1\left(\overline{D}_T\right)$, U_0 — отрезок на действительной оси, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv(t_0,T)$, $D_l\equiv(0,l)$, $\eta(t)\in C\left(E_0\right)$, $E_0\equiv\left[t_0-\tau;t_0\right]$, $0<t_0<T<\infty$, $0<l<\infty$, $0<\tau=const\ll T$, $0<\nu$, μ — малые параметры.

Изучается обратная задача для нелинейного дифференциального уравнения, где восстанавливаемая функция $v(t)$ находится в нелинейной правой части данного уравнения. Задание условия (5): во-первых, связано с запаздыванием в аргументе восстанавливаемой функции $v(t-\tau)$; во-вторых, необходимо оно для обеспечения единственности функции $v(t)$ и, в-третьих, сделает некорректно-поставленную задачу (1)-(4) корректно-поставленной и определяет значение неизвестной функции $v(t)$ в точке $t=t_0$, т. е. $v(t_0)=\eta(t_0)$.

Используется модифицированная методика разделения переменных, основанная на поиске решения смешанной задачи (1) — (3) в виде предела:

$$u(t,x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}a_i(t)b_i(x),\quad b_i(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\lambda_i x,\quad \lambda_i=\frac{i\pi}{l}.$$

Определение 1. *Решением обратной задачи называется пара функций* $\{u(t,x), v(t)\}$, *удовлетворяющая условиям (4), (5) и следующему интегральному тождеству*

$$\int_{t_0}^{T}\int_{0}^{l}\Big\{u(t,y)\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^4}{\partial t^2\,\partial y^2}\Phi(t,y)+$$

$$+\mu\frac{\partial^5}{\partial t\,\partial y^4}\Phi(t,y)+\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\Big]-f\left(t,y,u(t,y),v(t-\tau)\right)\Phi(t,y)\Big\}dydt=$$

$$=\int_0^l\varphi_1(y)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\Phi(t,y)+\mu\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\Big]_{t=t_0}dy-$$

$$-\int_0^l\varphi_2(y)\Big[\Phi(t,y)-\nu\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\Big]_{t=t_0}dy.$$

Если $\lambda_i^4\mu^2-4\lambda_i^2\nu-4<0$, то формальное решение смешанной задачи (1) — (3) можно записать в виде

$$u(t,x)=u_0(t,x)+\int_{t_0}^{t}\int_0^l Q\left(t,s,x,y\right)f\left(s,y,u(s,y),v(s-\tau)\right)dyds, \tag{6}$$

где

$$u_0(t,x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}w_i(t)b_i(x),\ Q\left(t,s,x,y\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}P_i(t,s)b_i(y)b_i(x).$$

$$w_i(t)=\exp\left\{-\frac{1}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu)t\right\}\Big[\varphi_{1i}\cos\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}+$$

$$+\frac{2}{\omega_{2i}(\nu,\mu)}\left(\varphi_{2i}+\frac{\varphi_{1i}}{2}\omega_{1i}(\nu,\mu)\right)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t}{2}\Big],$$

$$P_i(t,s)=\frac{2\exp\Big\{-\omega_{1i}(\nu,\mu)\frac{t-s}{2}\Big\}\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)\frac{t-s}{2}}{\omega_{0i}(\nu)\Big[\omega_{2i}(\nu,\mu)+\omega_{1i}(\nu,\mu)\sin\omega_{2i}(\nu,\mu)s\Big]},$$

$$\omega_{0i}(\nu)=1+\lambda_i^2\nu,\ \omega_{1i}(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^4\mu}{\omega_{0i}(\nu)},\ \omega_{2i}(\nu,\mu)=\frac{\lambda_i^2\sqrt{4\omega_{0i}(\nu)-\lambda_i^4\mu^2}}{\omega_{0i}(\nu)}.$$

Уравнение (6) является нелинейным интегральным уравнением Вольтерра второго рода относительно неизвестной функции $u(t,x)$ и нелинейным интегральным уравнением Вольтерра первого рода относительно восстанавливаемой функции $v(t)$. Используем условию (4). Тогда интегральное уравнение (6) приобретает вид

$$\psi(t) = u_0(t,x_0) + \int_{t_0}^{t}\int_{0}^{l} Q\left(t,s,x_0,y\right) f\left(s,y,u(s,y),v(s-\tau)\right) dyds. \tag{7}$$

Уравнение (7) запишем в виде нелинейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода относительно пары неизвестных функций $\Big\{u(t,x),\ v(t)\Big\}$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{0}^{l} Q\left(t,s,x_0,y\right) f\left(s,y,u(s,y),v(s-\tau)\right) dyds = g(t), \tag{8}$$

где $g(t) = \psi(t) - u_0(t,x_0)$.

Интегральные уравнения (6) и (8) составляют систему интегральных уравнений относительно пары неизвестных функций $\Big\{u(t,x),\ v(t)\Big\}$:

$$\begin{cases} u(t,x) = u_0(t,x) + \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{0}^{l} Q\left(t,s,x,y\right) f\left(s,y,u(s,y),v(s-\tau)\right) dyds, \\ \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{0}^{l} Q\left(t,s,x_0,y\right) f\left(s,y,u(s,y),v(s-\tau)\right) dyds = g(t). \end{cases} \tag{9}$$

Для разрешимости системы (9) методом последовательных приближений относительно неизвестной функции $v(t)$ преобразуем уравнение (8). Следует отметить, что классические методы интегрального преобразования не могут привести уравнения (8) к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Поэтому здесь используется другая методика. Уравнение (8) запишем в виде $v(t) + \int\limits_{t_0}^{t} F(s)v(s)ds = H\left(t,s,u(s,x),v(s)\right)$, где $0 < F(t)$ – произвольная функция в D_T такая, что $\exp\Big\{-\int\limits_{t_0}^{t} F(s)\,ds\Big\} \ll 1$ при $t > t_0$ и $H\left(t,s,u(s,x),v(s)\right) \equiv$

$$\equiv v(t) + \int\limits_{t_0}^{t} F(s)v(s)ds + g(t) - \int\limits_{t_0}^{t}\int\limits_{0}^{l} Q\left(t,s,x_0,y\right) f\left(s,y,u(s,y),v(s-\tau)\right) dyds.$$

Отсюда, используя резольвенту ядра $[-F(s)]$, имеем

$$v(t) = H\left(t,s,u(s,x),v(s)\right) - \int_{t_0}^{t} F(s)\exp\Big\{-\alpha(t,s)\Big\} H\left(s,\xi,u(\xi,x),v(\xi)\right) ds, \tag{10}$$

где $\alpha(t,s) = \int\limits_{s}^{t} F(\theta)d\theta$, $\alpha(t,t_0) = \alpha(t)$. Применяя к (10) формулу Дирихле, получаем

$$v(t) = H\left(t, s, u(s,x), v(s)\right) \exp\Big\{-\alpha(t)\Big\} +$$
$$+ \int_{t_0}^{t} F(s) \exp\Big\{-\alpha(t,s)\Big\} \Big[H\left(t, s, u(s,x), v(s)\right) - H\left(s, \xi, u(\xi,x), v(\xi)\right)\Big] ds. \qquad (11)$$

Уравнение (11) эквивалентно уравнению (8) при начальном условии (5). Отсюда вместо (9) получается новая система нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода относительно пары неизвестных функций $\Big\{u(t,x),\ v(t)\Big\}$:

$$\begin{cases} u(t,x) = \Theta_1(t,x;u,v), \\ v(t) = \Theta_2(t;u,v), \end{cases}$$

где через $\Theta_1(t,x;u,v)$ обозначен оператор в правой части (6), а через $\Theta_2(t;u,v)$ — оператор в правой части (11).

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\lambda_i^4 \mu^2 - 4\lambda_i^2 \nu - 4 < 0$;

2. $f(t,x,u,v)$ *удовлетворяет условию Гельдера по* x;

3. $\max_{(t,x)\in\overline{D}} \int_{t_0}^{t}\int_{0}^{l} |\,Q\left(t,s,x_0,y\right)||\,f\left(s,y,u,v\right)|\,dyds \le \Delta < \infty$;

4. $f\left(t,y,u,v\right) \in Lip\Big\{L_0(t,x)_{|\,u,v}\Big\}$, *где* $0 < \int_{t_0}^{t}\int_{0}^{l} L_0(s,y)dyds < \infty$;

5. $\max_{t\in\overline{D_T}} \int_{t_0}^{t} F(s)|\,g(t)-g(s)|\exp\Big\{-\alpha(t,s)\Big\}ds \le \beta < \infty$;

6. $\rho = 2\max\Big\{\max_{t\in\overline{D_T}} M_1(t); \max_{t\in\overline{D_T}} M_2(t)\Big\} < 1$,

где $M_1(t) = \int_{t_0}^{t}\int_{0}^{l} |\,Q\left(t,s,x_0,y\right)|\,L_0\left(s,y\right)\,dyds$,

$M_2(t) = \Big(1 + \int_{t_0}^{t} F(s)ds + M_1(t)\Big) M_0(t)$,

$M_0(t) = \exp\Big\{-\alpha(t)\Big\} + 2\int_{t_0}^{t} F(s)\exp\Big\{-\alpha(t,s)\Big\}ds.$

Тогда обратная задача (1) — (5) имеет единственное решение $\Big\{u(t,x),\ v(t)\Big\}$ *в области* D.

Тезисы даны в авторской редакции

Проведение конференции поддержано

Сибирским федеральным университетом,

Российским фондом фундаментальных исследований, грант 12-01-06074-г,

Красноярским краевым фондом поддержки научной и научно-технической деятельности.

Подписано в печать 06.09.2012 г. Формат 60x84. Усл. печ. л. 5.7

Уч.-изд. л. 5.5. Бумага тип. Печать офсетная.

Тираж 100 экз. Заказ №8799

Отпечатано в ПЦ БИК. 660041 Красноярск, пр. Свободный 82а.