

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТАНОВИВШИХСЯ ПРОЦЕССОВ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

Караваяев Д.В.

Научный руководитель – ассистент кафедры МиЕД Янченко И.В.

Хакасский технический институт – филиал Сибирского федерального университета

Современная математика дает универсальные средства исследования, не зря ее называют «языком всех наук». Моделирование – это исследование объекта или системы объектов путем построения и изучения их моделей. При построении математической модели, изучаемого объекта или явления выделяют особенности, черты и детали, которые содержат информацию об объекте и допускают математическую формализацию. Математическая формализация означает, что особенностям и деталям объекта можно поставить в соответствие подходящие математические понятия: числа, функции, матрицы и так далее, тогда связи и отношения, обнаруженные или предполагаемые в изучаемом объекте между отдельными его частями можно записать с помощью математических отношений: равенств, неравенств, уравнений. В результате получается математическое описание изучаемого процесса или явления, то есть его математическая модель.

Основные этапы моделирования: постановка задачи, изучение теоретических основ и сбор информации об объекте оригинала, формализация, выбор метода решения, реализация модели, анализ полученной информации и проверка адекватности реальному объекту.

Существует большое количество классификаций математических моделей. По характеру режимов математическая модель может быть статической и динамической. Рассмотрим создание статической модели, которая включает описание связей между основными переменными моделируемого объекта в установившемся режиме без учета изменения параметров во времени.

Первый этап – постановка задачи. На этапе определяется цель анализа, пути ее достижения. На этом этапе требуется глубокое понимание существа поставленной задачи. Для постановки задачи общих правил нет.

Задача. 1) Для данной электрической цепи (рис. 6) рассчитать токи на всех участках цепи. Сопротивления на участках цепи $R_1=R$, $R_2=R$, $R_3=R$, $R_4=R$, $R_5=2R$, $R_6=R$, $R_7=R$. $R=14$ Ом, ЭДС источника тока $\varepsilon=15$, внутреннее сопротивление источника тока $r=1$ Ом. 2) Определить зависимость силы тока на участке АВ от величины сопротивления участка АД, представить полученную зависимость графически.

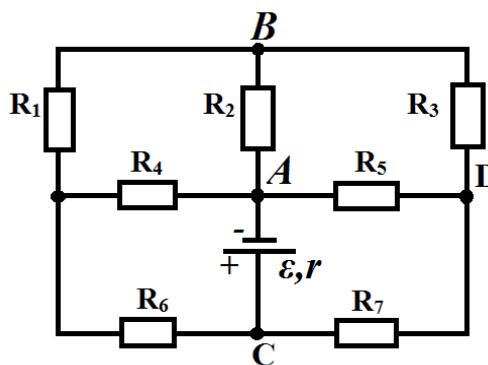


Рис. 6

Второй этап – изучение теоретических основ и сбор информации об объекте оригинала. В данном случае задача поставлена конкретно, не требует упрощений, как это требовала бы подобная задача, поставленная экспериментально в ходе

лабораторной работы, тогда следовало бы ввести упрощающие предположения, например о сопротивлениях соединительных проводов, измерительных приборов и т.п. На этом этапе подбирается (или разрабатывается) подходящая теория, в нашем случае, для расчета сложных электрических цепей применим правила Кирхгофа. Из полученной системы уравнений найдем значения сил токов на участках цепи I_k .

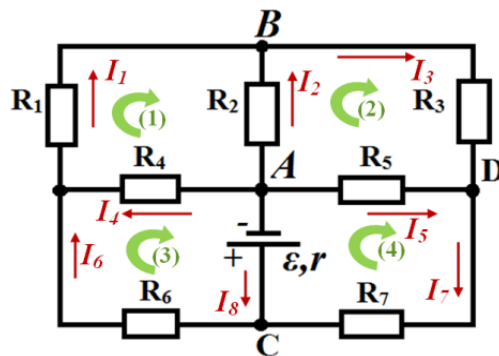


Рис. 7

Третий этап – формализация. Этот этап заключается в выборе системы условных обозначений и с их помощью записывать отношения между составляющими объекта в виде математических выражений. Значения некоторых параметров на этом этапе еще могут быть не конкретизированы.

Для применения правил Кирхгофа:

1. Выбираем произвольное направление токов I_k на всех участках цепи, у нас получилось восемь участков, соответственно восемь сил токов: $I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8$ (рис. 7).

2. Выбираем контуры. Контуры обозначим (1), (2), (3), (4), положительное направление – по часовой стрелке (рис. 7).

3. Составляем уравнения по первому и второму правилу Кирхгофа, так чтобы их число было равно числу искомых величин; каждое уравнение содержало хотя бы один элемент, не содержащийся в других (рис. 7).

Запишем первое правило Кирхгофа для узлов A, B, C, D: узел A: $-I_2 - I_4 - I_5 = 0$, узел B: $I_1 + I_2 - I_3 = 0$, узел C: $I_7 - I_6 + I_8 = 0$, узел D: $I_3 + I_5 - I_7 = 0$.

Запишем второе правило Кирхгофа для контуров (1), (2), (3), (4):

контур (1): $I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 = 0$, контур (2): $I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 - I_5 \cdot R_5 = 0$,

контур (3): $I_6 \cdot R_6 - I_4 \cdot R_4 + I_8 \cdot r = \varepsilon$, контур (4): $I_5 \cdot R_5 + I_7 \cdot R_7 - I_8 \cdot r = -\varepsilon$.

Итак, мы имеем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) из восьми уравнений с таким же количеством неизвестных.

Этап четвертый – выбор метода решения. На этом этапе устанавливаются окончательные параметры моделей. Для полученной математической задачи выбирается метод решения или разрабатывается специальный метод. При выборе метода учитываются знания пользователя, его предпочтения, а также предпочтения разработчика. Поскольку мы имеем систему линейных алгебраических уравнений, то для ее решения выбираем программу MathCAD, в которой имеется несколько способов решения СЛАУ. Математическая модель нашей задачи – матрица из коэффициентов при неизвестных A, состоящая из 8-ми строк и столбцов и матрица из свободных членов B, состоящая из одного столбца и 8-ми строк.

Программа MathCAD содержит много возможностей для решения систем линейных алгебраических уравнений от метода обратной матрицы до известных методов Крамера и Гаусса. Выберем для решения нашей системы встроенную функцию *Isolve*, применение которой рационально и дает быстрый результат. Матрицы будем вводить в символьном виде, что позволит использовать данную модель для расчета установившихся процессов в электрических цепях, содержащих до 4 контуров, что соответствует первому требованию моделирования – универсальности.

Поясним обозначения R_{11} – коэффициент при неизвестной силе тока I_1 , в уравнении, записанном для контура (1), R_{45} – коэффициент при неизвестной силе тока I_5 , в уравнении, записанном для контура (4), т. е. первое число после буквы R , номер контура, второе число – нижний индекс сопротивления R , рассматриваемой цепи. При отсутствии в контуре сопротивления с каким-либо индексом коэффициент равен 0, например $R_{46}=0$, тогда r_1 и ε_1 – внутреннее сопротивление и ЭДС в контуре (1). Для контура (1) мы записали второе правило Кирхгофа $I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 + I_4 \cdot R_4 = 0$, в новых обозначениях будет: $I_1 \cdot R_{11} + I_2 \cdot R_{12} + I_3 \cdot R_{13} + I_4 \cdot R_{14} + I_5 \cdot R_{15} + I_6 \cdot R_{16} + I_7 \cdot R_{17} + I_8 \cdot r_1 = \varepsilon_1$, где $R_{11} = 14$, $R_{12} = -14$, $R_{13} = R_{14} = R_{15} = R_{16} = R_{17} = 0$, $r_1 = 0$, $\varepsilon_1 = 0$.

Коэффициенты при силах тока в уравнениях записанных для узлов обозначим – для узла A , малой буквой a с индексом соответствующим номеру силы тока и так соответственно для узлов B, C, D .

На пятом этапе – этапе реализации модели, разработанный алгоритм реализуется выбранным способом, при необходимости корректируется, отлаживается, тестируется и получается решение нужной задачи.

Входные данные и матрицу вводим в программу MathCAD.

```

R11 := 14  R12 := -14  R13 := 0   R14 := 14   R15 := 0   R16 := 0   R17 := 0   r1 := 0   ε1 := 0
R21 := 0   R22 := 14  R23 := 14  R24 := 0   R25 := -28  R26 := 0   R27 := 0   r2 := 0   ε2 := 0
R31 := 0   R32 := 0   R33 := 0   R34 := -14  R35 := 0   R36 := 14  R37 := 0   r3 := 1   ε3 := 15
R41 := 0   R42 := 0   R43 := 0   R44 := 0   R45 := 28  R46 := 0   R47 := 14  r4 := -1  ε4 := -15

a1 := 0  a2 := -1  a3 := 0  a4 := -1  a5 := -1  a6 := 0  a7 := 0  a8 := 0
b1 := 1  b2 := 1  b3 := -1  b4 := 0  b5 := 0  b6 := 0  b7 := 0  b8 := 0
c1 := 0  c2 := 0  c3 := 0  c4 := 0  c5 := 0  c6 := -1  c7 := 1  c8 := 1
d1 := 0  d2 := 0  d3 := 1  d4 := 0  d5 := 1  d6 := 0  d7 := -1  d8 := 0

```

$$A := \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & R_{15} & R_{16} & R_{17} & r_1 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & R_{25} & R_{26} & R_{27} & r_2 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & R_{35} & R_{36} & R_{37} & r_3 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & R_{45} & R_{46} & R_{47} & r_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 & c_7 & c_8 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 & d_6 & d_7 & d_8 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

После ввода данных вычисляем определитель и ранг матрицы. Ранг должен быть равен числу неизвестных в системе уравнений, это означает, что все уравнения независимы. Определитель должен быть не равен нулю. При выполнении этих условий, получаем решение:

$$|A| = 8.259 \times 10^5 \quad \text{rank}(A) = 8$$

$$I := \text{Isolve}(A, B) \quad I = \begin{pmatrix} -0.299 \\ -0.05 \\ -0.349 \\ 0.249 \\ -0.199 \\ 1.196 \\ -0.548 \\ 1.744 \end{pmatrix}$$

$$I1 := -0.299 \quad I2 := -0.05 \quad I3 := -0.349 \quad I4 := 0.249 \quad I5 := -0.199$$

$$I6 := 1.196 \quad I7 := -0.548 \quad I8 := 1.744$$

На шестом этапе проводится анализ полученной информации. Сопоставляется полученное и предполагаемое решение, проводится контроль погрешности моделирования.

Проверим полученные результаты, записав второе уравнение. Подставим найденные значения и вычислим:

$$I1 := -0.299 \quad I2 := -0.05 \quad I3 := -0.349 \quad I4 := 0.249 \quad I5 := -0.199$$

$$I6 := 1.196 \quad I7 := -0.548 \quad I8 := 1.744$$

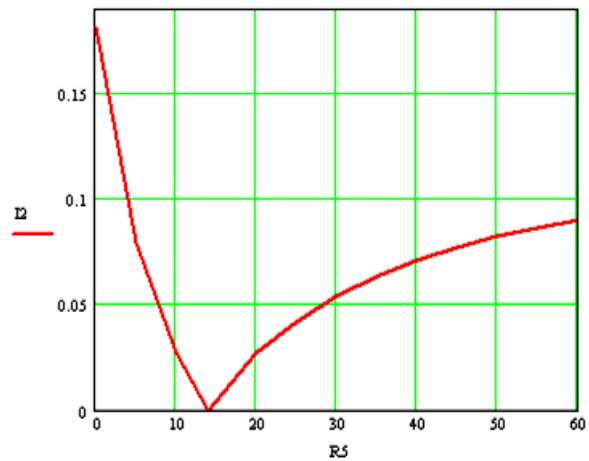
$$I1 \cdot R11 + I3 \cdot R23 + I7 \cdot R47 + I6 \cdot R36 = 0$$

Проверка показала, что математическая модель, созданная для расчета данной электрической цепи точна.

Ответим на вопрос второй части задачи: определить зависимость силы тока на участке АВ от величины сопротивления участка АД, представить полученную зависимость графически. Чтобы ответить на этот вопрос нужно получить зависимость силы тока от сопротивления $I_2(R_5)$, так как уравнений восемь, то этот процесс трудоемкий и длительный. Воспользуемся созданной математической моделью, для более быстрого построения графика.

Заменим значения вводимых сопротивлений R_{25} на $-R$, R_{45} на R , где R – переменное сопротивление. Задавая значения сопротивления R от 0 до 60 Ом, получаем значения силы тока на участке АВ. В силу симметрии задачи, нетрудно заметить, что при $R=14$ Ом, должно быть $I_2=0$. Получаем результат и строим график зависимости $I_2(R_5)$:

$R5 :=$	$I2 :=$
0	0.181
5	0.079
10	0.027
14	0
20	0.027
25	0.042
30	0.054
35	0.063
40	0.071
45	0.077
50	0.082
55	0.086
60	0.09



Полученная кривая при первом взгляде вызывает некоторое недоумение однако анализ графика, который затем следует, позволяет понять сущность закона Ома, следствием которого являются правила Кирхгофа.

Математическая модель, созданная для этой задачи, является универсальной для задач поиска сил токов при установившихся процессах в электрических цепях, содержащих не более четырех контуров, задавая соответствующие коэффициенты при неизвестных силах тока, величину ЭДС и сопротивление источника тока r – неизвестные силы тока находятся без каких-либо усилий (автоматически) в программе MathCAD. При применении модели для контуров менее четырех отсутствующие элементы нужно принять равными нулю. Модель значительно облегчает и ускоряет обработку данных, поскольку решение такой матрицы вручную не рационально и занимает много времени, конечно, необходимо отметить, что основой создания математической модели все же являются знания и в данном случае по двум дисциплинам – физики и информатики.