УДК 621.311.001.57

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТОПОЛОГИИ СХЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СЕТЕЙ НА ОСНОВЕ МАТРИЦ ИНЦИДЕНЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПАКЕТА MathCAD

Сизганов Н. В.
научный руководитель канд. техн. наук Сизганова Е.Ю.
Политехнический институт Сибирского Федерального Университета

Задачи анализа электрических сетей описываются системами линейных уравнений, или, в случае нелинейности описания, линеаризуются на каждом шаге итеративного процесса решения. Линейные уравнения, описывающие состояние электрической сети, составляются на основе общих принципов с использованием законов Ома и Кирхгофа. После составления этих уравнений выбирается наиболее целесообразный метод их решения в зависимости от характера задачи и располагаемых средств. При этом учитывается простота метода, количество требуемых арифметических операций и необходимый объем памяти ЭВМ. Часто методы основываются на непосредственном применении алгебры матриц, что предполагает формальные операции с матрицами без выявления их специфических особенностей, позволяющих повысить эффективность решения.

Характерным свойством сетей больших энергосистем является относительно слабая топологическая взаимосвязь их элементов друг с другом, что приводит к слабой заполненности (разреженности) матриц уравнений, описывающих эти системы. В электроэнергетических системах отношение числа ветвей к числу узлов составляет около 1,5. Отсюда следует, например, что матрица коэффициентов уравнений, описывающих режим системы, содержащей 250 узлов, имеет около 1% ненулевых элементов, а для системы, содержащей 2500 узлов – всего около 0,1%.

Для решения задачи расчета линейной электрической сети необходимо составить систему уравнений, описывающей режим сети и выполнить операции над матрицей коэффициентов этой системы. В зависимости от способа составления уравнений электрической сети (по методу узловых потенциалов или контурных токов), получаемые при этом матрицы коэффициентов будут различными, поскольку выбор метода определяет как число уравнений, так и количество ненулевых коэффициентов в них. Следовательно, как выбор метода решения задачи, так и возможность учета слабой заполненности матрицы коэффициентов существенно зависит от того, каким образом составлены уравнения.

Часто уравнения, описывающие заданную систему, нелинейны, что не позволяет непосредственно применять методы решения линейных задач. Но в большинстве методов численного решения нелинейных уравнений используются итерационные процессы, в которых последовательные приближения, приводящие к решению, рассчитываются с применением линеаризации, например метод Ньютона. Поскольку на шаге итерационного процесса задача линеаризуется с некоторой погрешностью, каждому такому шагу можно поставить в соответствие эквивалентную линейную сеть. Следовательно, и для решений нелинейных уравнений полезно ясно представлять принципы составления линейных уравнений сети с использованием матриц соединений, составляемых по физической схеме сети.

Электрические сети современных электроэнергетических систем есть совокупность сотен и даже тысяч ЛЭП и трансформаторов. Расчеты режимов сложных схем электрических сетей требуют специальных моделей представления схем и компактной записи уравнений. Такими моделями являются графы и матрицы. Топологию (геометрическое изображение) сети можно представить соответствующим *графом* (рис.1), который описывается матрицами инциденций (соединений): 1) узлов и ветвей; 2) ветвей в контуры.

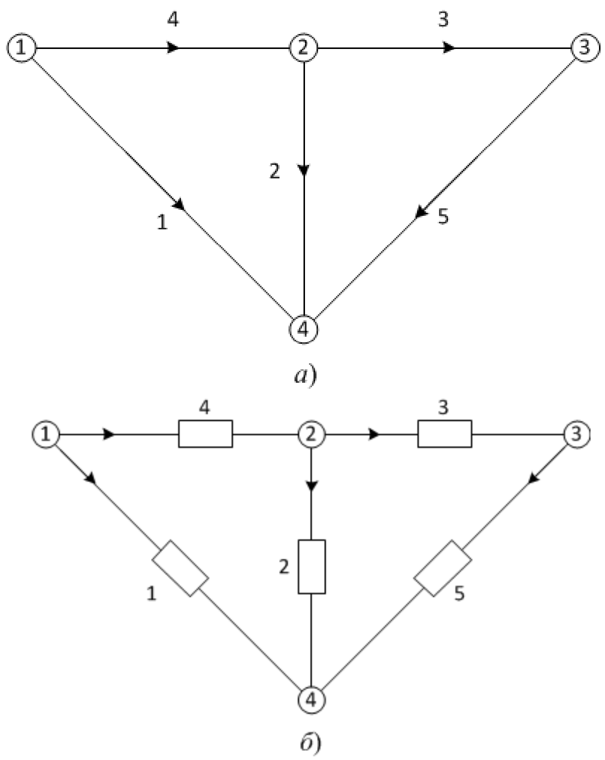

Рис. 1. Граф (а), отображающий структуру электрической сети (б)

Первая матрица инциденций **М** устанавливает взаимосвязь между узлами и ветвями электрической сети. Она имеет размерность $N\text{-}1\times L$, где N – число узлов, L – число ветвей, т.е. не содержит строку, соответствующую базисному узлу (для удобства присваиваем ему наибольший номер), так как эта строка является зависимой и может быть получена как комбинация остальных строк.

Прежде чем строить матрицу **М**, каждой ветви необходимо задать направление, которое удобно выбирать совпадающим с направлением передаваемой по этой ветви величины (ток, поток мощности и т.д.). Примем, что для ветви i-j, имеющей порядковый номер s , и связывающей узлы i и j, положительным считается направление от i к j.

Каждый элемент матрицы **М**, находящийся на пересечении строки k (соответствующей k-ому узлу) и столбца s (соответствующего ветви i-j) определяется из соотношения:

Для реализации алгоритма построения матрицы **М** в пакете MathCad необходимо создать матрицу исходных данных **ID**, размерностью $L\times 2$, в которой будут храниться: в первом столбце – номера начальных узлов i_s ветвей s, во втором столбце – номера конечных узлов j_s ветвей s, где s – порядковый номер ветви.

Тогда программа, формирующая матрицу инциденций **М**, будет иметь вид:

$$
M := \left|\begin{array}{l}
i \leftarrow ID^{\langle 1\rangle} \\
j \leftarrow ID^{\langle 2\rangle} \\
\text{for } k \in 1..N-1 \\
\quad \text{for } s \in 1..L \\
\quad\quad m_{k,s} \leftarrow \left|\begin{array}{l} 1 \text{ if } k = i_s \\ -1 \text{ if } k = j_s \\ 0 \text{ if } k \neq i_s \wedge k \neq j_s \end{array}\right. \\
m
\end{array}\right.
$$

Изменив при необходимости порядок нумерации ветвей (соответственно матрицу **ID**), разделим матрицу соединений узлов и ветвей на два блока, соответствующих *дереву* (связанный подграф с числом ветвей, на единицу меньшим полного числа узлов) и *хордам* (ветви графа, исключенные при получении дерева).

$$\mathbf{M} = [\mathbf{M}_t | \mathbf{M}_c]$$

где $\mathbf{M}_t$ – блок, соответствующий дереву, представляет собой квадратную неособенную матрицу; $\mathbf{M}_c$ – блок, соответствующий хордам.

Процедура разделения матрицы **M** в пакете MathCad реализуется следующим образом:

$$M_t := \text{submatrix}(M, 1, \text{rows}(M), 1, N-1)$$

$$M_c := \text{submatrix}[M, 1, \text{rows}(M), 1 + (N-1), \text{cols}(M)]$$

Поскольку для заданного графа определено дерево, то по его ветвям однозначно определяется путь от любого узла до базисного. Таким образом, составим матрицу соединений, описывающую эти пути, – матрицу коэффициентов распределения **A**, элемент a_{ks} которой, принадлежащий строке k и столбцу s, определяется как 1, если направление ветви s совпадает с направлением от узла k к базисному; –1, если направление ветви s противоположно направлению от узла k к базисному; 0, если ветвь s не входит в путь от узла k к базисному.

Для любой электрической сети матрицы $\mathbf{M}_t$ и **A** связаны соотношением

$$\mathbf{M}_t \cdot \mathbf{A}^T = \mathbf{E},$$

где **E** – единичная матрица, или

$$\mathbf{A}^T = \mathbf{M}_t^{-1}.$$

Получение матрицы коэффициентов распределения **A** в пакете MathCad

$$A := \left(M_t^{-1}\right)^T$$

Вторая матрица инциденций **D** – матрица соединений ветвей в контуры. Контур определяется как замкнутый путь, проходящий по любой из ветвей только один раз. Число независимых контуров равно числу независимых контурных уравнений. Базисный контур состоит из любого числа ветвей дерева и только одной хорды. Следовательно, базисные контуры любого графа определяются выбором дерева. Поскольку каждому базисному контуру соответствует одна хорда, число базисных контуров и, следовательно, число независимых контуров равно числу хорд. Базисные контуры могут быть определены базисной матрицей соединений ветвей в контуры, элемент d_{ps} которой, находящийся в строке p и столбце s, соответствует контуру p и ветви s. Этот элемент определяется следующим образом: 1, если направление обхода базисного контура p совпадает с направлением ветви s; –1, если направление обхода базисного контура p противоположно направлению ветви s; 0, если базисный контур p не содержит ветвь s.

Выбираем направления обхода базисных контуров совпадающими с направлениями замыкающих их хорд, тогда, разделив матрицу соединений на блоки, соответствующие ветвям дерева и хордам, получим:

$$\mathbf{D} = [\,\mathbf{D}_t \,|\, \mathbf{D}_c\,] = [\,\mathbf{D}_t \,|\, \mathbf{E}\,],$$

где $\mathbf{D}_t$ – блок, соответствующий ветвям, а $\mathbf{D}_c$ – хордам; при этом $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Матрица $\mathbf{D}_t$, может быть выражена через блоки $\mathbf{M}_t$ и $\mathbf{M}_c$ матрицы соединений ветвей и узлов и через матрицу коэффициентов распределения $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{D}_t^T = -\mathbf{M}_t^{-1}\,\mathbf{M}_c = \mathbf{A}^T\,\mathbf{M}_c\,.$$

Получение матрицы **D** в пакете MathCad

$$D := \mathrm{augment}\left[\left(M_t^{-1}\cdot M_c\right)^T, \mathrm{identity}\left[\mathrm{rows}\left[\left(M_t^{-1}\cdot M_c\right)^T\right]\right]\right]$$

Небазисные контуры заданного графа получают линейным преобразованием базисных контуров.

Таким образом, реализованные в пакете MathCad модели топологии электрических сетей в виде матриц инциденций будут полезны студентам при расчете и анализе сложных электрических систем. Достаточно задать матрицу **ID** в соответствии со схемой соединений сети. Полученные матрицы соединений (инциденций) могут использоваться при составлении узловых (матрица **M**) и контурных (матрица **D**) линейных уравнений электрической сети для численного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов, Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи: учебник / Л. А. Бессонов. – 11-е изд., перераб. и доп. – М.: Гардарики, 2007. – 701 с.: ил.
2. Брамеллер А. и др. Слабозаполненные матрицы: Анализ электроэнергетических систем. Пер. с англ./ Брамеллер А., Аллан Р., Хэмэм Я. – М.: Энергия, 1979. – 192 с, ил.
3. Веников В.А. Математические задачи электроэнергетики – М.: Высшая школа, 1981.
4. Дьяконов В.П. "Mathcad 2001. Учебный курс." – С.Пб..: “Питер”, 2001. – 624 с.