УДК 530.12:531.51

# ГЛОБАЛЬНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ СТАТИЧЕСКИХ СФЕРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ПЛОСКОЕ ПРОСТРАНСТВО МИНИМАЛЬНОГО ЧИСЛА ИЗМЕРЕНИЙ

**Шейкин А. А.**
**научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доц. Пастон С. А.**
***Санкт-Петербургский государственный университет***

На протяжении вот уже многих десятилетий задача квантования гравитации остается камнем преткновения для теоретической физики. Общая теория относительности Эйнштейна на сегодняшний день, бесспорно, является наиболее хорошо разработанной теорией гравитационного взаимодействия, дает очень хорошее согласие с экспериментом и позволяет объяснить огромное множество физических явлений при очень небольшом количестве исходных предположений. Однако при попытках ее квантования неизбежно возникновение крайне серьезных технических и методологических трудностей. Многие из них возникают в первую очередь потому, что общая теория относительности является динамической теорией пространства-времени, и по самому ее построению в ней отсутствуют необходимые для квантования объекты: например, выделенная ось времени, необходимая для построения гамильтонова формализма; фоновая метрика, необходимая для записи канонических коммутационных соотношений; калибровочно инвариантные наблюдаемые, необходимые для построения самосогласованной теории, обладающей калибровочной симметрией, и многое другое [1].

Таким образом, одним из этапов квантования гравитации в рамках традиционной квантовой теории поля должна являться ее переформулировка на более удобном, чем геометродинамика, языке. Одним из возможных вариантов такой переформулировки является теория вложения — теория, в которой динамика искривленного четырехмерного пространства-времени рассматривается как динамика четырехмерной поверхности, вложенной в плоское объемлющее пространство большей размерности [2]. Такое вложение возможно благодаря известной теореме Жане-Картана, гласящей о том, что любое риманово многообразие размерности N можно (по крайней мере локально) рассматривать как поверхность в плоском объемлющем пространстве размерности N(N+1)/2. Наличие дополнительных симметрий многообразия позволяет снизить количество измерений, требуемых для вложения (для статических сферически симметричных многообразий число измерений плоского объемлющего пространства равно 6).

Однако в такой формулировке существуют и свои трудности. Одной из них до недавнего времени являлось отсутствие асимптотически плоского вложения метрики гравитационного поля, создаваемого точечной массой (метрики Шварцшильда), т. е. вложения, стремящегося к вложению плоскости при удалении от источника поля [3].

Ниже мы покажем, что с использованием метода построения вложений симметричных поверхностей, описанного в [4], можно получить как асимптотически плоское глобальное вложение метрики Шварцшильда в пространство минимального количества измерений, так и отсутствующее пока в литературе глобальное вложение ее обобщения на случай присутствия электрического заряда — метрики Райсснера-Нордстрема. Используется геометрическая система единиц, в которой $G=c=1$.

Как известно из дифференциальной геометрии, метрика $g_{\mu\nu}(x^\mu)$, индуцированная на вложенной поверхности, связана с функцией вложения соотношением

$$g_{\mu\nu}(x)=\eta_{ab}\partial_\mu y^a(x^\mu)\partial_\nu y^b(x^\mu), \tag{1}$$

где $\eta_{ab}$ — метрика объемлющего пространства (в нашем случае это пространство Минковского), $x^\mu$ — координаты на поверхности, а $y^a$ — функция вложения, описывающая поверхность. Таким образом, задача о нахождении вложения с математической точки зрения представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, регулярных методов решения которой в общем случае не существует. Однако в случае наличия симметрий многообразия можно значительно упростить задачу, потребовав, чтобы функция вложения имела ту же симметрию, что и многообразие (это не всегда так: например, веретенообразная поверхность, локально обладающая метрикой сферы, не является сферой с точки зрения внешней геометрии), частично зафиксировав таким образом ее вид и значительно уменьшив количество переменных.

Одним из возможных вариантов выбора функции вложения, обладающей симметрией $SO(3)\otimes T^1$ является следующий:

$$\begin{aligned} &y^0 = kt + T(r), && y^3 = r\cos(\theta),\\ &y^1 = \tau\, A(r)\sin(t/\tau + f(r)), && y^4 = r\sin(\theta)\cos(\phi),\\ &y^2 = \tau\, A(r)\cos(t/\tau + f(r)), && y^5 = r\sin(\theta)\sin(\phi), \end{aligned} \tag{2}$$

где $k,\tau$ — вещественные числа, $t,r,\theta,\phi$ — координаты на поверхности, $A(r), f(r), T(r)$ — неизвестные функции радиальной координаты. Первые 3 компоненты функции вложения реализуют $T^1$ - инвариантность посредством сдвигов и поворотов в объемлющем пространстве, последние 3 — $SO(3)$ -инвариантность посредством вращений в объемлющем пространстве.

Асимптотически плоское вложение метрики Шварцшильда можно получить, выбрав метрику объемлющего пространства $\eta_{ab} = diag(1,-1,-1,-1,-1,-1)$. Задача о нахождении вложения метрики Шварцшильда, таким образом, сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &k^2 - A^2 = 1 - 2m/r,\, kT - A^2\tau\, f' = 0,\\ &T^2 - \tau^2(A'^2 - A^2 f') - 1 = -(1-2m/r)^{-1}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $m$ — масса точечного источника. Условие асимптотической плоскости вложения требует, чтобы $k$=1, тогда $A(r) = \sqrt{2m/r}$. Явное решение третьего уравнения с учетом второго дает

$$f(r) = -\int \frac{dr\sqrt{A^2/\tau^2 - A'^2(1-A^2)}}{A(1-A^2)}. \tag{4}$$

Видно, что *f(r)* расходится при *r=2m*, но эта расходимость является координатной и может быть устранена переходом в другую систему отсчета. Асимптотически плоское неособенное вложение метрики Шварцшильда в пространство минимального количества измерений, таким образом, выглядит как

$$\begin{aligned} &y^0 = \tilde{t}, && y^3 = r\cos(\theta),\\ &y^1 = \tau\, A(r)\sin(\tilde{t}/\tau + \psi(r)), && y^4 = r\sin(\theta)\cos(\phi),\\ &y^2 = \tau\, A(r)\cos(\tilde{t}/\tau + \psi(r)), && y^5 = r\sin(\theta)\sin(\phi), \end{aligned} \tag{5}$$

где $\tau = 6\sqrt{3}m, A(r) = \sqrt{2m/r}, \psi(r) = -(6m+r)^{3/2}/(6m\sqrt{3r})$. Прямой проверкой можно убедиться, что метрика, построенная по данной функции вложения, является решением вакуумных уравнений Эйнштейна $G_{\mu\nu} = 0$ и по теореме Биркгоффа не может быть ничем иным, кроме метрики Шварцшильда.

Видно, что данная поверхность не имеет особенностей и является всюду аналитичной, за исключением (физической) сингулярности при $r = 0$. При удалении от центра значение компонент $y^{(1,2)}$ стремится к нулю как $1/\sqrt{r}$, и вложение переходит во вложение плоского пространства. Данное вложение является глобальным, т. е. покрывает как внешнюю (*r>2m*), так и внутреннюю (*r<2m*) область черной дыры.

Стоит отметить, что известно несколько асимптотически плоских вложений метрики Шварцшильда [3,5,6], но ни одно из них не является минимальным в смысле количества измерений объемлющего пространства, в то время как указанное здесь обладает этим свойством и, помимо этого, имеет лишь одно времениподобное направление в объемлющем пространстве, что позволяет использовать его в физических задачах, например, при решении задачи многих тел.

Вышеприведенный выбор $SO(3)\otimes T^1$ -симметричной функции вложения позволяет также найти явный вид вложения для другой физически интересной метрики — метрики Райсснера-Нордстрема, описывающей гравитационное поле точечного массивного заряженного источника. Отметим, что в литературе до сих пор не существует глобального минимального вложения метрики Райсснера-Нордстрема — минимальные покрывают не все пространство, а глобальные содержат большое количество дополнительных измерений [3].

Для того, чтобы получить вложение метрики Райсснера-Нордстрема, следует выбрать метрику объемлющего пространства $\eta_{ab}=diag(-1,1,1,-1,-1,-1)$. Условие согласования (1) функции вложения с видом метрической функции, даваемым формулой

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu=(1-2m/r+Q^2/r^2)dt^2-dr^2/(1-2m/r+Q^2/r^2)-r^2 d\Omega^2 \quad ,(6)$$

где $Q$ — заряд источника, приводит к следующим формулам для коэффициентов в (2):

$$A(r)=\frac{\sqrt{(Rr-2Q^2)^2+r^2K^2)}}{(2Qr)},T(r)=\tau\int dr\,A^2 f'/k\,,k=\frac{\sqrt{(R^2+K^2-4Q^2)}}{(2Q)},$$

$$f'(r)=\frac{\sqrt{P^{(7)}_{Q,R,K,\tau}(r)}}{(-4RrQ^2+4Q^4+r^2(R^2+K^2))(r^2-Rr+Q^2)\tau}, \qquad (7)$$

где $R=2m$ — гравитационный радиус, $P^{(7)}_{Q,R,K,\tau}(r)$ — полином седьмой степени по $r$, коэффициенты которого зависят от $R$ и $Q$— физических параметров теории, и $\tau$ и $K$ — параметров, значения которых определяются требованием неотрицательности $P^{(7)}_{Q,R,K,\tau}(r)$. Численный анализ этого полинома показывает, что для любых наперед выбранных значений физических параметров $R$ и $Q$ существуют значения $\tau$ и $K$, обеспечивающие такую неотрицательность. Две сингулярности на горизонтах Райсснера-Нордстрема являются такой же координатной особенностью, как и особенность на горизонте в решении Шварцшильда, и могут быть устранены аналогичной сменой системы отсчета. Таким образом можно получить глобальное вложение метрики заряженного точечного массивного тела в пространство минимального количества измерений.

Найденные вложения могут использоваться при изучении геометрических свойств статических сферически симметричных метрик, а также при построении теории гравитации в терминах функции вложения.

Литература


1. S. Carlip. Rep. Prog. Phys. 64 885 (2001).
2. S. A. Paston, V. A. Franke. Teoret. Mat. Fiz., 153:2 (2007), 271–288.
3. D. N. Blaschke, H. Steinacker. Class. Quantum Grav. 27 185020 (2010).
4. S. A. Paston, A. A. Sheykin. Class. Quantum Grav. (in print), arXiv:1202.1204.
5. D. I. Diakonov (unpublished).
6. Miguel D. Bustamante (unpublished).