УДК 66.021.1

РАСЧЕТ ПЕРЕПАДА ДАВЛЕНИЯ В ЗАЗОРЕМЕЖДУ РОТОРОМ И СТАТОРОМ МНОГОСТУПЕНЧАТОГОГИДРОУДАРНО-КАВИТАЦИОННОГОУСТРОЙСТВА

Мещеряков И.В.
научный руководитель д-р техн. наук, проф. Анушенков А.Н.
Сибирскийфедеральныйуниверситет

Гидродинамический анализ работы многоступенчатого гидроударно-кавитационного устройства кроме определениячисла, формы и размера щелей в статоре и роторе, пропускной способности ступени, частоты вращения ротора, исходного размера поступающей на обработку частицы, давления в рабочей камере, силы гидроудара, интенсивности диффузионного обмена между воздушной и жидкой средами, степени кавитацинного воздействия, достаточности импульсов для резонансного разрушения частицы, частоты на разряжение в статоре и на сжатие в роторе подразумеваетв том числе и учет дополнительного давления в зазоре между ротором и статором устройства, обусловленного центробежными силами инерции, возникающими при вращении рабочей жидкости в зазоре. Для расчёта перепада такого давлениянеобходимонайти зависимость угловой скоростижидкости от радиальной координаты и используя эту зависимость, провести интегрирование и вычислить искомый перепад давления.

Итак, найдем зависимость угловой скорости жидкости от радиальной координаты. Пусть имеется два бесконечно высоких коаксиальных цилиндра с радиусами R_1 и R_2, причем, пространство между ними заполнено жидкостью с вязкостью η и плотностью ρ. Внутренний цилиндр (с радиусом R_1) вращается с угловой скоростью ω_1, внешний же цилиндр (с радиусом R_2) неподвижен (рисунок 1). Необходимо найти функцию ω(r) – зависимость угловой скорости жидкости от радиальной координаты[1].

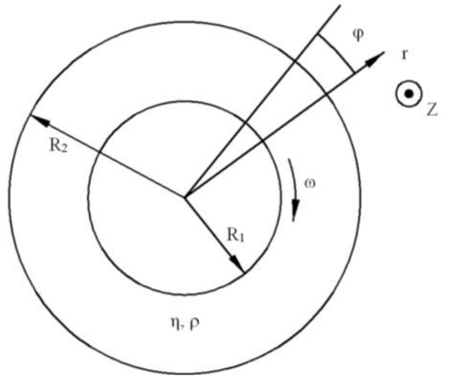

Рисунок 1 – К определению зависимости угловой скорости от радиальной координаты

Для этого выберем цилиндрические координаты r, φ и z с осью z, ориентированной по оси цилиндров, тогда справедливы следующие очевидные равенства для компонентов вектора скорости и скалярного давления:

$$\upsilon_z = \upsilon_r = 0;\ \upsilon_\varphi = \upsilon(r);\ \rho = \rho(r) \quad (1)$$

При этом уравнение неразрывности удовлетворяется тождественным образом и остается решить уравнения Навье-Стокса, которые в данных цилиндрических координатах и в данном случае имеют вид:

$$\rho\frac{^{2}}{r} = \frac{d}{dr}; \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{d}{dr} - \frac{}{r^2} = 0 \quad (2)$$

Второе из этих уравнений имеет решение:$\upsilon(r) = Ar + B/r$. Константы A и B определим из граничных условий:$\upsilon(R_1) = \omega_1$; $\upsilon(R_2) = 0$.

Определенные таким образом величины A и B равны соответственно:

$$\mathrm{A} = \frac{\omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2}; B = \frac{\omega_1 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (3)$$

Тогда решение для азимутального компонента скорости течения жидкости выглядит следующим образом:

$$(\mathrm{r}) = \frac{-\omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot r + \frac{\omega_1 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (4)$$

Поскольку линейная и угловая скорости связаны радиальной координатой$\omega = \upsilon/r$, то угловая скорость частиц жидкости как функция радиальной координаты $\omega(r)$ определится по выражению:

$$\omega(\mathrm{r}) = \frac{-\omega_1 R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot r + \frac{\omega_1 R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot \frac{1}{r} \quad (5)$$

После тождественных преобразований получим:

$$\omega(\mathrm{r}) = \omega_1 \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_2^2}\right] \quad (6)$$

Вданное решение не входит вязкость жидкости, так как$\upsilon_z = \upsilon_r = 0$; $\upsilon_\varphi = \upsilon(r)$; $\rho = \rho(r)$. Однакоименно вязкость жидкости обеспечивает азимутальное движение (вращение) жидкости и, например, при расчете моментов сил инерции. Действующих как на внутренний цилиндр (ротор), так и на внешний (статор).

В зазоре устройства δи пренебрегая краевыми эффектами (то есть, переходя от бесконечно высоких цилиндров к ротору и статору с конечной высотой), из формулы (6) получим:

$$\omega(\mathrm{r}) = \omega_1 \frac{R_1}{2\delta} \left[\frac{R_1^2 + 2R_1\delta}{r^2} - 1\right] \quad (7)$$

В формуле (7) следующее:

$R_2 = R_1 + \delta$; $R_2^2 = R_1^2 + 2R_1\delta$; $\delta < R_1$ (8)

Для расчета дополнительного давления, создаваемого вращающейся в зазоре жидкости за счет центробежных сил инерции необходимо вычислить следующий интеграл:

$$\Delta P_{\text{зазор}} = \rho \cdot \int_{R_1}^{R_2} \omega^2 r dr \quad (9)$$

Структура данного интеграла такова, что использование приближения $R_2^2 = R_1^2 + 2R_1\delta$и соответствующей ему формулы (7) непосредственно в интеграле (9) приводит к ошибочным результатам. Это связано с тем, что на этапе интегрирования пренебрежение в суммах членами с δ^2 по сравнению с членами сδв качестве множителя недопустимо [2]. С другой стороны преобразование полученной в результате интегрирования точной формулыведет к искомому правильному результату. Для решения этой задачи подставим интеграл (6) в выражение для функции$\omega(r)$:

$$\Delta P_{\text{зазор}} = \rho \cdot \int_{R_1}^{R_2} \omega_1^2 \cdot \frac{R_1^4 R_2^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_2^2}\right] r dr \quad (10)$$

После тождественных преобразований формула(10) преобразуется к виду:

$$\Delta P_{\text{зазор}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \omega_1^2 R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \cdot \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{R_2^2 - r^2}{r^2}\right]^2 \mathrm{d}(r^2) \quad (11)$$

Вычисляя интеграл (11), получим следующее выражение для «центробежного» давления в зазоре:

$$\Delta P_{\text{зазор}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \omega_1^2 R_1^4}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \cdot \left[\frac{R_2^4 - R_1^4}{R_1^2} - 4R_2^2 ln \frac{R_2}{R_1}\right] \quad (12)$$

Выражение (12) математически точно, однако необходимо преобразовать его, с целью упрощения, воспользовавшись, неравенством $\delta<R_1$ [3]. Преобразуем «логарифмическую» часть формулы (12):

$$ln\frac{R_2}{R_1}=ln\frac{R_1+\delta}{R_1}=ln\left[1+\frac{\delta}{R_1}\right]=\frac{\delta}{R_1}-\frac{\delta^2}{2R_1^2}$$

Тогда выражение в скобках формулы (9) преобразуется к виду:

$$\frac{R_2^4-R_1^4}{R_1^2}-4R_2^2\cdot\left[\frac{\delta}{R_1}-\frac{\delta^2}{2R_1^2}\right]=\frac{4R_1^3\delta+6R_1^2\delta^2}{R_1^2}-(4R_1^2+8R_1\delta+4\delta^2)\cdot\left[\frac{\delta}{R_1}-\frac{\delta^2}{2R_1^2}\right]$$

$$=4R_1\delta+6\delta^2-4R_1\delta-8\delta^2-\frac{4\delta^3}{R_1}+2\delta^2+\frac{4\delta^3}{R_1}+\frac{4\delta^4}{R_1^2}=\frac{2\delta^4}{R_1^2}$$

Окончательно, для искомого перепада давления получаем:

$$\Delta P_{зазор}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho\omega_1^2R_1^4}{\left(R_2^2-R_1^2\right)^2}\cdot\left[\frac{R_2^4-R_1^4}{R_1^2}-4R_2^2ln\frac{R_2}{R_1}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{\rho\omega_1^2R_1^4}{(2R_1+\delta)^2\delta^2}\cdot\frac{2\delta^4}{R_1^2}=\frac{\rho\omega_1^2R_1^2}{2}\cdot\frac{2\delta^2}{(2R_1+\delta)^2}=\frac{\rho\omega_1^2R_1^2}{2}\cdot\frac{\delta^2}{2R_1^2} \qquad (13)$$

Необходимо отметить, что при выводе формулы (13) использовались следующие точные и приближенные соотношения:

$$R_2^2-R_1^2=2R_1\delta+\delta^2;$$
$$R_2^4-R_1^4=4R_1^3\delta+6R_1^2\delta^2; \qquad (14)$$
$$(R_2^2-R_1^2)^2=(2R_1\delta+\delta^2)^2=(2R_1+\delta)^2\delta^2$$

В приближенном равенстве (14) сохранены члены порядка δ^2 и более [4].

Таким образом «центробежное» давление вычислено и определяется по формуле:

$$\Delta P_{зазор}=\frac{\rho\omega_р^2R_р^2}{2}\cdot\frac{\delta^2}{2R_р^2} \qquad (15)$$

Индекс «1» в предыдущем выражении соответствует параметрам ротора устройства. Выражение (15) можно преобразовать к следующему виду:

$$\Delta P_{зазор}=\frac{\rho\omega_р^2\delta^2}{4} \qquad (16)$$

Сомножитель $\frac{\rho\omega_р^2R_р^2}{2}$ в точности равен «центробежному» давлению в щели ротора.В связи с этим второй сомножитель в правой части выражения (15) $\frac{\delta^2}{2R_р^2}$ является долей «центробежного» давления в зазоре от «центробежного» давления в роторе. Отсюда следует, что эта доля тем больше, чем больше величина радиального зазора.

Список использованной литературы

1 Соколов В.И. Основы расчета и конструирования машин и аппаратов пищевых производств. М.: Машиностроение, 1983.

2Червяков В.М., Однолько В.Г. Использование гидродинамических и кавитационных явлений в роторных аппаратах. – М.: Машиностроение, 2008. – 116 с.

3 Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Определения, теоремы, формулы. М.: Наука, 1977.- 832 с.

4 Запорожец Е. П. Исследование вихревых и кавитационных потоков в гидравлических системах // Теор. основы хим. технол. 2004. №3.С. 243-252.