УДК 519.61

О ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Окунь А.А.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Осипов В. В.
Сибирский федеральный университет

При решении многих задач техники и технологии очень часто приходится находить корни алгебраических уравнений, которые в общем случае являются нелинейными и, следовательно, аналитически чаще всего не решаемы. Поэтому неизбежно приходится применять численные методы решения указанных уравнений. Наиболее распространенными методами таких задач являются:

1. метод Ньютона (метод касательных);
2. метод секущих;
3. метод хорд;
4. комбинированный метод.

Рассмотрим основную идею каждого метода и дадим сравнительный анализ методов по скорости сходности и степени обусловленности, используя ПО MathCAD.

Метод Ньютона (метод касательных).

Пусть корень ξ уравнения $f(x)=0$ отделен на отрезке $[a,b]$. Предположим мы нашли $(n-1)$-ое приближение корня x_{n-1}. Тогда n-ое приближение x_n мы можем получить по формуле

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}; \quad n = 1, 2, ...$$

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене дуги кривой $y = f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой.

Достаточные условия сходимости метода Ньютона определяются следующей теоремой.

Теорема. Если $f(a)f(b)<0$, причем $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют определенные знаки при $a \le x \le b$, то исходя из начального приближения $x_0 \in [a,b]$, удовлетворяющего неравенству $f(x_0)f''(x_0)>0$ можно вычислить методом Ньютона единственный корень ξ уравнения $f(x)=0$ с любой степенью точности.

Критерий завершения итерационного процесса имеет вид $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

Метод секущих

Если итерации x_n и x_{n+1} расположены достаточно близко друг к другу, то производную $f'(x_n)$ в алгоритме Ньютона можно заменить ее приближенным значением

$$f'(x_n) \approx \left[f(x_n) - f(x_{n-1}) \right] \frac{1}{x_n - x_{n-1}}.$$

Таким образом, из формулы метода Ньютона получим формулу секущих

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})} f(x_n).$$

Геометрический смысл такого изменения алгоритма Ньютона состоит в том, что от аппроксимации $f(x)$ касательной мы переходим к секущей. Метод секущих уступает методу Ньютона в скорости сходимости, однако не требует вычисления производной функции $f(x)$.

Метод хорд

Рассмотрим более быстрый способ нахождения корня на интервале [a,b], в предположении, что $f(a)f(b)<0$.

Тогда, для n-го приближения корня получим

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f(b)-f(x_{n-1})}(b - x_{n-1}).$$

Здесь подвижен конец a, то есть $f(x_i)f(b)<0$. Аналогичная ситуация если подвижен конец b, то есть $f(x_i)f(a)<0$:

$$x_n = a - \frac{f(a)}{f(x_{n-1})-f(a)}(x_{n-1} - a).$$

Теорема. Пусть задана непрерывная: дважды дифференцируемая функция $f(x)$ на $[a,b]$ и пусть $f(a)f(b)<0$, а $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют свои знаки на $[a,b]$. Тогда итерационный процесс метода хорд сходится к корню ξ с любой наперед заданной точностью ε.

Комбинированный метод

Пусть $f(a)f(b)<0$, а $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знаки на $[a,b]$. Объединяя метод хорд и метод Ньютона, можно ускорить сходимость итерационного процесса поиска корня. В результате мы получаем комбинированный метод, на каждом шаге которого находим значение обоих границ интервалов, внутри которых содержится корень. Также как и в методе хорд, имеем следующие ситуации:

1) Если $f''(b_0)f(b_0)>0$ (то есть b_n - неподвижен) то

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)(b_n - x_n)}{f(b_n)-f(x_n)}; \quad x_0 = a_0 = a; \; b_0 = b; \\ b_n = b_{n-1} - \dfrac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}; \quad \text{либо } b_n = b_{n-1} - \dfrac{f(b_{n-1})}{f'(b_0)}. \end{cases}$$

2) Если $f''(a_0)f(a_0)>0$ (a_n - неподвижен), то

$$\begin{cases} x_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)(x_n - a_n)}{f(x_n)-f(a_n)}, \; x_0 = b_0 = b; \; a_0 = a; \\ a_n = a_{n-1} - \dfrac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}; \text{ либо } a_n = a_{n-1} - \dfrac{f(a_{n-1})}{f'(a_0)}. \end{cases}$$

Используя описанные алгоритмы и функции MathCAD, корень уравнения $10\cos x - 0{,}1x^2 = 0$ был найден методом Ньютона, секущих, хорд и комбинированным методом. Во всех методах при точности числа eps=10^{-6} и на границах поиска от 1 до 2 корень равен 1,546866. Но при изменении числа eps от 0,1 до 0,000001 значения в разных методах стали отличатся:

Таблица 1 – Зависимость значений функции от метода решения и числа eps

Eps	Ньютона	Секущих	Хорд	Комбинированный
10^{-1}	1.546889	1.546808	1.537587	1.528539

10^{-2}	1.546889	1.546866	1.547081	1.546985
10^{-3}	1.546889	1.546866	1.546861	1.546985
10^{-4}	1.546866	1.546866	1.546861	1.546864
10^{-5}	1.546866	1.546866	1.546866	1.546864
10^{-6}	1.546866	1.546866	1.546866	1.546866

Согласно таблице 1 самые сильные различия в значениях даёт комбинированный метод, следовательно, при решении этим методом необходимо сделать больше всего итераций, что бы добиться необходимой точности. Лучший результат показал метод секущих, по этому методу уже при eps=10^{-2} выдается такой же результат, как и при eps=10^{-6}, следовательно, для нахождения решения с приемлемой точностью потребуется меньше времени.

По количеству итераций циклов, при нахождении корня уравнения с точность до 10^{-6}, в различных методах получились следующие значения:

Таблица 2 – Зависимость итераций цикла от метода решения

Метод	Количество итераций
Ньютона	3
Секущих	2
Хорд	5
Комбинированный	4

Согласно таблице 2 меньше всего повторений цикла происходит в методе секущих – 2, следовательно, решение находится быстрее и проще, больше всего итераций понадобилось при решение с помощью метода хорд – 5, т. е. на этот метод придется затратить больше времени.

В итоге – проще и быстрее находить решение нелинейного уравнения с помощью метода секущих, т. к. этот метод не требует нахождение второй производной функции, а получение результата, с необходимой точностью, происходит за наименьшее количество итераций. Приведем реализацию и программный код этого метода в MathCAD:

Реализация метода секущих

$f(x) := 10\cos(x) - 0.1x^2 \qquad e := 0.000001$

$f1(x) := \frac{d}{dx}f(x) \qquad f1(x) \rightarrow -0.2 \cdot x - 10 \cdot \sin(x)$

$x_0 := 1.1 \quad x_1 := 1.9 \quad k := 1..5$

$x_{k+1} := x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} \cdot f(x_k) \qquad e_{k+1} := |x_{k+1} - x_k|$

$$x = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.9 \\ 1.541008 \\ 1.546939 \\ 1.546866 \\ 1.546866 \\ 1.546866 \end{pmatrix} \qquad e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.358992 \\ 0.005931 \\ 0.000072 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Программный код метода секущих

```
sekushih(f, a, b, e) := | x1 ← (b + e) − f(b + e)·e / (f(b + 2e) − f(b + e))
                        | x2 ← x1 − f(x1)·e / (f(x1 + e) − f(x1))
                        | while |x2 − x1| > e
                        |    | x3 ← x2 − f(x2)(x2 − x1) / (f(x2) − f(x1))
                        |    | x1 ← x2
                        |    | x2 ← x3
                        | x2
sekushih(f, a, b, e) = 1.546866
```