УДК 519.212.3

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ВЕРОЯТНОСТИ В СЛУЧАЕ ОГРАНИЧЕННОЙ И НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Тарасова Н.В., Чистякова Н.Е.
научный руководитель канд. пед. наук Бутакова С.М.
Сибирский федеральный университет

В различных разделах науки и техники нередко возникают ситуации, когда результат каждого из многих проводимых опытов заранее предугадать невозможно, однако можно исследовать закономерности, возникающие при проведении серии опытов. Нельзя, например, точно сказать, какая сторона монеты окажется сверху при данном броске: герб или цифра – но при большом количестве бросков число выпадений герба приближается к половине количества бросков; нельзя заранее предсказать результат одного выстрела из данного орудия по данной цели, но при большом числе выстрелов частота попадания приближается к некоторому постоянному числу. Исследование вероятностных закономерностей массовых однородных явлений составляет предмет теории вероятностей.

Теория вероятностей – сравнительно молодая ветвь математики. Ее развитие как самостоятельной науки началось с переписки Паскаля и Ферма в 1654 году. Однако раньше уже Кардано (1501 – 1576) и Галилей (1564 – 1642) правильно решали специальные теоретико-вероятностные задачи.

Мысль о том, что законы природы проявляются через множество случайных событий, подробно изложил Лукреция Кара в поэме «О природе вещей». В 1658 году появилась книга Христиана Гюйгенса (1629 — 1695) «О расчетах в азартных играх». С работой Гюйгенса непосредственно связана основная работа Якоба Бернулли (1654 – 1705) «Искусство догадок». Работы Абрахама де Муавра (1667 – 1754) «Об измерении случайности, или о вероятностях результатов в азартных играх», опубликованы в 1711 году. В Лондоне уже с 1592 года составлялись таблицы смертности и вопросы страхования. На основе этих записей Джон Граунт (1620 – 1674) в 1662 году впервые составил таблицы вероятности смерти как функции возраста. Несколькими годами позднее Ван Худде и Ван де Витт в Голландии, проделав аналогичные расчеты, использовали их для вычисления пожизненной ренты. Подробнее эти вопросы в 1693 году были изложены Галлеем.

Основным понятием классической теории вероятностей является случайное событие. Из анализа математической литературы известны следующие виды вероятности случайного события – это классическая, статистическая и геометрическая вероятности. Отметим недостатки некоторых подходов к определению вероятностей: классический способ не применим к бесконечным множествам событий (исходов) и предполагает наличие полной группы событий, то есть идеальной ситуации; статистическое определение предполагает неоднозначность статистической вероятности, значения которой колеблется около какого-то теоретического числа.

Чтобы преодолеть недостаток классического определения вероятности, состоящий в том, что оно неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов, вводят геометрические вероятности. Геометрическая вероятность – вероятность попадания точки в область (отрезок, часть плоскости или пространства). Все дальнейшие рассуждения будем вести, опираясь на точку зрения В.И. Афанасьева, О.В. Зиминой, А.И. Кирилова, И.М. Петрушко, Т.А. Сальниковой.

В задачах по нахождению геометрической вероятности будем испытание интерпретировать как случайный выбор точки в некоторой области D, а событие A –

как попадание выбранной точки в некоторую подобласть G области D. При этом требуется, чтобы все точки области D имели одинаковую возможность быть выбранными.

Обозначим меру (длину, площадь, объем) области через m. При этом вероятность попадания точки, брошенной наудачу в область G - часть области D, равна отношению мер областей G и D, соответственно равных $m(G)$ и $m(D)$.Формула геометрической вероятности в этом случае имеет вид: $P(A) = m(G) / m(D)$.

В случае классического определения вероятность достоверного (невозможного) события равна единице (нулю); справедливы и обратные утверждения (например, если вероятность события равна нулю, то событие невозможно). В случае геометрического определения вероятности обратные утверждения не имеют места. Например, вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области D равна нулю, однако это событие может произойти, и, следовательно, не является невозможным.

Приведем рассмотренные нами задачи, иллюстрирующие подходы к нахождению геометрической вероятности случайного события в случае ограниченной и неограниченной областей.

Задача 1. Две точки независимо друг от друга наудачу выбираются на отрезке [0;1]. Найти вероятность того, что частное от деления координаты первой точки на координату второй точки больше 0,5.

Решение.

1. Пусть ξ и η - координаты первой и второй точек, выбранных на [0;1]. Каждой паре (ξ,η) вещественных чисел соответствует точка квадрата $D = \{(x,\ y)\text{: } x \in [0;1],\ y \in [0;1]\}$ на плоскости XOY, а пространство элементарных исходов совпадает с квадратом D.
2. Проверим равновозможность элементарных исходов. Она гарантирована методикой проведения случайного эксперимента, так как обе точки выбираются на отрезке наудачу и ни один из участков квадрата не является более предпочтительным, чем другой равный ему по площади.
3. Выделим те элементарные (благоприятные) исходы, которые приводят к наступлению интересующего нас события. Благоприятным исходам $A = \{\frac{\xi}{\eta} > 0{,}5\}$ соответствует та часть области D, в которой частное от деления координаты первой точки на координату второй точки больше 0,5 , то есть область $G = \{(x,\ y)\text{: } \frac{x}{y} > 0{,}5\} \subset D$ (рис. 1). Причем мерами областей D и G в условиях нашей задачи являются их площади.

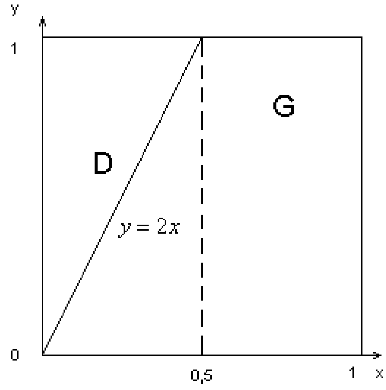

Рис. 1.

4. Находим площадь $S(D)$ области D. Очевидно, что $S(D) = 1$, как площадь квадрата со стороной длины равной 1.
5. Находим площадь $S(G)$ области G. Имеем: $S(G) = 0{,}5 \cdot 1 + \dfrac{0{,}5 \cdot 1}{2} = 0{,}5 + 0{,}25 = 0{,}75$.
6. Тогда, согласно геометрическому определению вероятности:
$$P(A) = \frac{S(G)}{S(D)} = \frac{0{,}75}{1} = 0{,}75.$$

Задача 2. Плоскость разбита прямыми на квадратные клетки со стороной a. Клетки пронумерованы при помощи пар целых чисел (m, n) (при этом у соседней справа клетки будет номер $(m + 1, n)$, а у соседней сверху клетки будет номер $(m, n + 1)$). Найти вероятность того, что брошенная наудачу на плоскость монета радиуса $r < \frac{a}{2}$ целиком попадет в какую-нибудь клетку, для которой $m^2 - n^2$ кратно четырем.

Решение.

1. Определим пространство элементарных исходов. В данном случае им является любая из равных прямоугольных ячеек, которые содержат равные части множества благоприятных исходов G равные части его дополнения до всей плоскости. Обозначим такую ячейку символом D. Чтобы найти D, заметим, что если некоторая клетка (m, n), удовлетворяет требуемому условию, то ему удовлетворяют и клетки $(m + 2, n)$, $(m - 2, n)$, $(m, n + 2)$, $(m, n - 2)$, то есть имеет место периодичность по горизонтали с периодом 2 и по вертикали с периодом 2. Поэтому в качестве ячейки D можно взять область размером 2 на 2, составленную из клеток (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) (рис. 2).

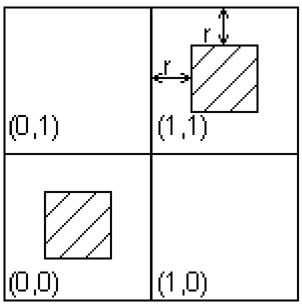

Рис. 2.

2. Проверим равновозможность элементарных исходов. Она гарантирована методикой проведения случайного эксперимента, поскольку, как сказано в условии задачи, монета бросается наудачу.
3. Опишем те элементарные исходы, которые приводят к наступлению интересующего нас события: $m^2 - n^2$ делится на четыре в клетках (0,0) и (1,1). Для того чтобы монета оказалась внутри некоторой клетки, необходимо и достаточно, чтобы центр монеты находился в одной из точек, расположенных внутри клетки на расстоянии большем r от границы этой клетки. На рисунке 2 изображена ячейка D и заштрихована область благоприятных исходов $G \subset D$.

4. Находим площадь $S(D)$ ячейки D. Имеем $S(D) = 4a^2$, т. к. имеется четыре квадратные ячейки со стороной a.
5. Находим площадь $S(G)$ области $G \subset D$. Имеем $S(G) = 2(a - 2r)^2$, так как нас интересуют в условиях задачи две ячейки, область G в которых является квадратом со стороной $(a - 2r)$.
6. Искомая вероятность равна:

$$P(A) = \frac{S(G)}{S(D)} = \frac{2(a-2r)^2}{4a^2} = \frac{(a-2r)^2}{2a^2}.$$

Подводя итог, отметим, что подходы к нахождению геометрической вероятности для ограниченной и неограниченной областей имеют следующие особенности:

- при нахождении геометрической вероятности попадания точки в область G, принадлежащей ограниченной области D, за пространство элементарных исходов берется область D, множество благоприятных исходов представлено областью G;
- в случае вычисления геометрической вероятности нахождения точки в неограниченной области G принадлежащей области D, сначала производится деление области на равные прямоугольные ячейки и выбирается область ячеек, которые содержат равные части области G и равные части ее дополнения. Далее отбираются благоприятные исходы, множество которых совпадает с областью G, принадлежащей целиком области D.