ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ В ПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ И ИХ КОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Жулин А. И. Козырев А. С.
научный руководитель доцент Осипова С. И.
Сибирский федеральный университет

Известно высказывание Фридриха Энгельса о том, что математика изучает пространственные формы и количественные отношения реального мира. Кажется, что данное высказывание противоречит тому, что абстрактность есть важный признак математической науки, позволяющий ей получать новейшие научные знания в силу логики своего развития, и не имеющие ничего общего с реально существующими объектами современного мира. Однако историческое развитие человеческой цивилизации доказывает, что полученные фундаментальными исследованиями знания часто применялись для решения весьма практических задач, и, более того, продукты этих исследований входили в повседневный быт.

В этом докладе речь пойдет о построении и исследовании формул так называемых замечательных кривых в полярной системе координат, а также о реальных образах действительности, которые описывают эти кривые.

Рассматривая, например, подсолнух, шишку, морскую звезду, мы обнаруживаем удивительное совершенство их форм, в основе которых, предположим гипотетически, лежат математические формулы. Будут исследованы такие математические объекты, как спираль Архимеда, логарифмическая спираль, семейство «роз Гранди» и многие другие замечательные кривые. Нам представляется возможным наглядно показать закон перехода количества в качество и наоборот, если качество представляет вид кривой, а количество – численное значение параметра. Рассмотрим *спираль Архимеда* ($\rho=\alpha\cdot\varphi$). В области техники спираль Архимеда находит применение в так называемых кулачковых механизмах, которые преобразуют вращательное движение шайбы в поступательное движение стержня. В некоторых механизмах (например, в часах) требуется, чтобы стержень двигался равномерно. Обеспечить это можно, очертив профиль шестеренки по спирали Архимеда. В качестве второго объекта для применения спирали Архимеда в технике можно привести самоцентрирующийся патрон, направляющие канавки которого выполнены по спирали Архимеда. При одном повороте диска этого патрона кулачки перемещаются на величину радиального расстояния смежных каналов. Кроме того, форму спирали Архимеда имеются звуковая дорожка на CD и DVD дисках, и одна из деталей швейных машин – механизм для равномерного наматывания ниток на шпульку.

Следующей кривой в нашем докладе будет *логарифмическая спираль* ($\rho=\alpha e^{\beta\theta}$). В истории математики она впервые упоминается в 1638 году Декартом, который определял новую спираль как линию, у которой отношение длины дуги к соответствующему радиус-вектору является постоянным. Логарифмическая спираль часто встречается в природе и связана с определенными видами роста. У многих моллюсков последовательные витки раковины неодинаковы, все более и более утолщаются. Во многих случаях приближенные значения толщины последовательных витков образуют геометрическую прогрессию. Хотя саму раковину моллюска нельзя назвать живой, она образуется растущим организмом. В подсолнухе семечки расположены по характерным дугам, близким, как показывают соответствующие исследования, к дугам логарифмической спирали. В связи с подобными фактами некоторые ученые считают логарифмическую спираль кривой, являющейся одним из выражений законов органического роста. Применение логарифмической спирали в технике основано на свойстве этой кривой пересекать свой радиус-вектор под постоянным углом. Так, вращающиеся ножи в различных режущих машинах имеют профиль, очерченный по дуге спирали, благодаря чему угол резанья (угол между лезвием ножа и направлением его скорости вращения) остается постоянным вдоль всей кромки подвижного ножа, что обеспечивает меньший его износ. Труба, проводящая струю воды к лопастям турбинного колеса ГЭС, имеет профиль, очерченный по дуге логарифмической спирали. Это позволяет обеспечить минимальные потери энергии на изменение направления течения, и, следовательно, напор используется с максимальной производительностью.

Понятие *«циклоида»* ($x = r \cdot arccos\frac{r-y}{r} - \sqrt{2 \cdot r \cdot y - y^2}$) связано с решением древней задачи, звучащей так: какой формы должен быть гладкий желоб, чтобы некий металлический шарик скатился из одного края желоба в другой под действием своего собственного веса и за кратчайшее время? Великий Галилео Галилей считал, что формой этот желоб должен быть в форме выгнутой по дуге окружности, однако он ошибался. Лишь в 1696 году швейцарец Иоганн Бернулли вычислил, что желоб должен быть в форме циклоиды – плоской трансцендентной кривой с периодом по оси абсцисс, равным 2πR. С циклоидой связан один интересный парадокс: любой колесный транспорт имеет внутри себя точки, которые движутся против его вектора движения. Дело в том, что края колеса описывают по ходу движения циклоиду, которая в нижней своей точке меняет вектор.

В курсе высшей математики мы знакомились с *эллипсом* ($\chi^2/a^2+y^2/b^2=1$), который представляет собой геометрическое место точек Эвклидовой плоскости, для которых сумма расстояний до фокусов постоянна и больше чем расстояние между фокусами. Но что скрывается за этой сухой формулировкой? Если внимательно приглядеться к окружающему миру, то эллипс – это одна из фигур, на которой держится Вселенная. Форма орбиты всех планет нашей Солнечной системы эллиптическая, да и сама наша планета имеет эллиптическую форму. Представим, что форма орбиты была какой-нибудь другой. Тогда меняется протяженность года на нашей планете, продолжительность суток – а значит имела бы другой вид вся жизнь на Земле, в том числе и мы с вами.

Улитку Паскаля (ρ=l-a˙sinφ) впервые определил французский ученый Этьен Паскаль, отец знаменитого ученого Блеза Паскаля. Эту кривую можно построить, если взять точку не самой катящейся окружности, а внутри неё, сместив в сторону от центра. В природе Улитка Паскаля встречается в формах раковин головоногих (в частности улиток), является элементом некоторых растений. Все видели усики гороха, закручивающиеся в спираль. В технике Улитка Паскаля используется для вычерчивания профиля эксцентрика, в случае, если скользящий по профилю стержень совершает гармонические колебания. Данный профиль используется, например, в механике машин.

К другим замечательным кривым относятся *кардиоида* (кривая, получившая свое название из-за сходства с сердцем) и *полярная роза* (r=a˙coskφ, r=a˙sinkφ) Это одна из самых известнейших кривых, имеющая форму лепестков цветка.

Последней кривой, которую мы рассмотрим, будет *кривая Коха*, являющаяся типичным геометрическим фракталом. Процесс её построения выглядит следующим образом: берем единичный отрезок, разделяем его на три равные части и заменяем средний интервал равносторонним треугольником без этого сегмента. Продолжая и продолжая этот процесс, мы можем создать наикрасивейшие фигуры – так называемые «Снежинки Коха». Кох нашел эту кривую в начале XX века, во время активного развития квантовой механики. Исследователь М. Броун, зарисовывая траектории движения взвешенных частиц в воде, описал это явление так: беспорядочно движущиеся атомы жидкости ударяются о взвешенные частицы и тем самым приводят их в движение. После такого объяснения перед учеными встала задача найти такую кривую, которая бы не имела касательных ни в одной точке. Именно для этого Кох предложил кривую, позже названную его именем.

В докладе приводятся демонстрации, изучение вида кривых и изучение их формы с изучением их параметров и использованием разработанной авторами программы.