

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИБЫЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЯДА ФУРЬЕ

Чашкина А.А, Терехина Ю.Д.

Научный руководитель канд. техн. наук Тумашев В.И.

*Челябинский институт (филиал) РГТЭУ*

Для познания закономерностей развития социально-экономических явлений во внутригодовой динамике необходимо иметь количественные характеристики развития изучаемых явлений по месяцам и кварталам годового цикла. Большое значение приобретает изучение покупательского спроса населения на отдельные товары и виды услуг. Цель моделирования покупательского спроса дает возможности для прогнозирования и разработки, оперативных мер по управлению прибылью.

Предметом исследований в данной работе послужил анализ прибыли на ювелирные изделия, разработка математической модели получения прибыли. Отметим, что спрос на ювелирные изделия колеблется от месяца к месяцу, при наличии некоторого тренда, что показывают данные за ряд лет.

Для исследования явлений периодического типа в качестве математической модели развития во времени было использовано уравнение следующего типа (ряд Фурье) [1,2]

$$\hat{y}_t = a_0 + \sum (a_k \cos kt + b_k \sin kt) \quad (1)$$

Где  $k$  определяет гармонику ряда Фурье, которая может быть получена с разной степенью точности (в данной работе до 6). Для отыскания параметров модели используется метод наименьших квадратов.

Он позволяет получить следующие формулы для вычисления параметров (1).

$$a_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i; \quad a_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \cos kt; \quad b_k = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n y_i \sin kt \quad (2)$$

Для изучения сезонных колебаний по предыдущим годам были использованы среднее значение прибыли за последние три года по каждому месяцу. Для нахождения параметров модели необходимо взять  $n=12$  (по числу месяцев в году). Тогда представляя периоды как части длины окружности, ряд динамики изменения прибыли можно записать в следующем виде:

Период	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$2\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
Уровень	$y_0$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$y_5$	$y_6$	$y_7$	$y_8$	$y_9$	$y_{10}$	$y_{11}$

Для вычисления синусов и косинусов разных гармоник, можно воспользоваться таблицей

t	Cost	cos2t	cos3t	cos4t	cos5t	cos6t	sin	sin2t	sin3t	sin4t	sin5t	sin6t
0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
$\pi/6$	0,866	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	0,5	0,866	1	0,87	0,5	0
$\pi/3$	0,5	-0,5	-1	-0,5	0,5	1	0,87	0,866	0	0,87	0,87	0
$\pi/2$	0	-1	0	1	0	-1	1	0	-1	0	1	0
$2\pi/3$	-0,5	-0,5	1	-0,5	-0,5	1	0,87	-0,87	0	0,87	0,87	0
$5\pi/6$	0,866	0,5	0	-0,5	0,87	-1	0,5	-0,87	1	0,87	0,5	0

π	-1	1	-1	1	-1	1	0	0	0	0	0	0
7π/6	0,866	0,5	0	-0,5	0,87	-1	-0,5	0,866	-1	0,87	-0,5	0
4π/3	-0,5	-0,5	1	-0,5	-0,5	1	0,87	0,866	0	0,87	0,87	0
3π/2	0	-1	0	1	0	-1	-1	0	1	0	-1	0
5π/3	0,5	-0,5	-1	-0,5	0,5	1	0,87	-0,87	0	0,87	0,87	0
11π/6	0,866	0,5	0	-0,5	-0,87	-1	-0,5	-0,87	-1	0,87	-0,5	0

Так как  $t$  в годовой динамике соответствует номеру месяца, то  $t=0$  соответствует январю,  $t = \frac{\pi}{6}$  соответствует февралю и т.д. При определении параметров  $a_k$  и  $b_k$  надо

находить произведение уровней данного месяца на синусы и косинусы соответствующих гармоник. Так для  $k=1$  уравнение (1) примет вид:

$$y_t = a_0 + a_1 \cos t + b_1 \sin t,$$

в которой параметры  $a_0$ ,  $a_1$  и  $b_1$  определяется из соотношений:

$$a_0 = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n y_i; \quad a_1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n y_i \cos t; \quad b_1 = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^n y_i \sin t$$

Расчеты первой и второй гармонии ряда Фурье рассмотрены на примере получения прибыли конкретного ювелирного магазина.

Все необходимые расчеты приведены в таблице

месяцы	t	прибыль в тыс.руб.	y Cos t	y Sin t	$\hat{y}_t$	y Cos 2t	y Sin 2t	$\hat{y}_t$
I	0	133	133	0	202,5187	133	0	238,6853
II	π/6	176	152,4	88	181,0173	88	152,416	196,1008
III	π/3	196	98	169,736	159,8035	-98	169,736	138,7203
IV	π/2	121	0	121	144,5573	-121	0	108,3907
V	2π/3	85	-42,5	73,61	139,3682	-42,5	-73,61	124,2846
VI	5π/6	158	-136,8	79	145,6233	79	136,828	166,7065
VII	π	218	-218	0	161,648	218	0	197,8147
VIII	7π/6	213	184,458	-106,5	183,1493	106,5	184,458	198,2328
IX	4π/3	179	-89,5	155,014	204,3632	-89,5	155,014	183,28
X	3π/2	161	0	-161	219,6093	-161	0	183,4427
XI	5π/3	168	84	145,488	224,7985	-84	145,488	209,715
XII	11π/6	377	326,482	-188,5	218,5433	188,5	326,482	239,6265
итого		2185	122,612	225,156	2185	217	-20,784	2185

Используя первую гармонику ряда Фурье, получим следующие значения параметров уравнения:

$$a_0=2185:12=182,083; \quad a_1=122,612:6=20,44; \quad b_1=-225,156:6=-37,526.$$

Уравнение модели будет иметь вид:  $\hat{y}_t = 182,083 + 20,44 \cos t - 37,526 \sin t$ .

Применим к этим же данным вторую гармонику ряда Фурье для выражения модели сезонности. Параметры  $a_2$  и  $b_2$  найдем по формулам:

$$a_2 = \frac{1}{6} \sum_1^n y_i \cos 2t = 217:6 = 36,17; \quad b_2 = \frac{1}{6} \sum_1^n y_i \sin 2t = -20,784:6 = -3,464.$$

Подставляя полученные коэффициенты в уравнение ряда Фурье, будем иметь следующую модель сезонной волны:

$$\hat{y}_t = 182,083 + 20,44 \cos t - 37,526 \sin t + 36,17 \cos 2t - 3,464 \sin 2t.$$

Расчеты третьей и четвертой гармоник представлены в следующей таблице.

месяцы	t	y Cos 3t	y Sin 3t	$\hat{y}_t$	y Cos 4t	y Sin 4t	$\hat{y}_t$
I	0	133	0	207,852	133	0	184,0187
II	$\pi/6$	0,0	176	160,1008	-88	152,416	138,5195
III	$\pi/3$	-196	0	169,5537	-98	-169,736	214,9684
IV	$\pi/2$	0	-121	144,3907	121	0	120,5573
V	$2\pi/3$	85	0	93,45131	-42,5	73,61	71,86994
VI	$5\pi/6$	0,0	158	130,7065	-79	-136,828	176,1212
VII	$\pi$	-218	0	228,648	218	0	204,8147
VIII	$7\pi/6$	0	-213	234,2328	-106,5	184,458	212,6515
IX	$4\pi/3$	179	0	152,4467	-89,5	-155,014	197,8614
X	$3\pi/2$	0	161	147,4427	161	0	123,6093
XI	$5\pi/3$	-168	0	240,5483	-84	145,488	218,967
XII	$11\pi/6$	0	-377	275,6265	-188,5	-326,482	321,0412
итого		-185	-216	2185	-143	-232,088	2185

Параметры третьей и четвертой гармоник будут соответственно вычислены по следующим формулам:

$$a_3 = -185:6 = -30,83; \quad a_4 = -143:6 = -23,83; \quad b_3 = -216:6 = -36; \quad b_4 = -232,088:6 = -38,68.$$

Тогда выделенная сезонная волна, учитывающая четыре гармоники, будет иметь следующий вид:

$$\hat{y}_t = 182,033 + 20,44 \cos t - 37,526 \sin t + 36,17 \cos 2t - 3,464 \sin 2t - 30,83 \cos 3t - 36 \sin 3t - 23,83 \cos 4t - 38,68 \sin 4t.$$

Расчеты пятой и шестой гармоник представлены в следующей таблице:

месяцы	t	y Cos5t	y Sin5t	$\hat{y}_t$	y Cos6t	y Sin6t	$\hat{y}_t$ (итог)
I	0	133	0	151,9167	133	0	114,0833
II	$\pi/6$	-152,416	88	157,0828	-176	0	194,9161
III	$\pi/3$	98	-169,736	214,9158	196	0	177,0825
IV	$\pi/2$	0	121	102,0833	-121	0	139,9167
V	$2\pi/3$	-42,5	-73,61	103,9194	85	0	66,08609

VI	5π/6	136,828	79	139,0839	-158	0	176,9172
VII	π	-218	0	236,9167	218	0	199,0833
VIII	7π/6	184,458	-106,5	194,0881	-213	0	231,9215
IX	4π/3	-89,5	155,014	197,9139	179	0	160,0806
X	3π/2	0	-161	142,0833	-161	0	179,9167
XI	5π/3	84	145,488	186,9175	168	0	149,0842
XII	11π/6	-326,482	-188,5	358,0785	-377	0	395,9119
итого		-192,612	-110,844	2185	-227	0	2185

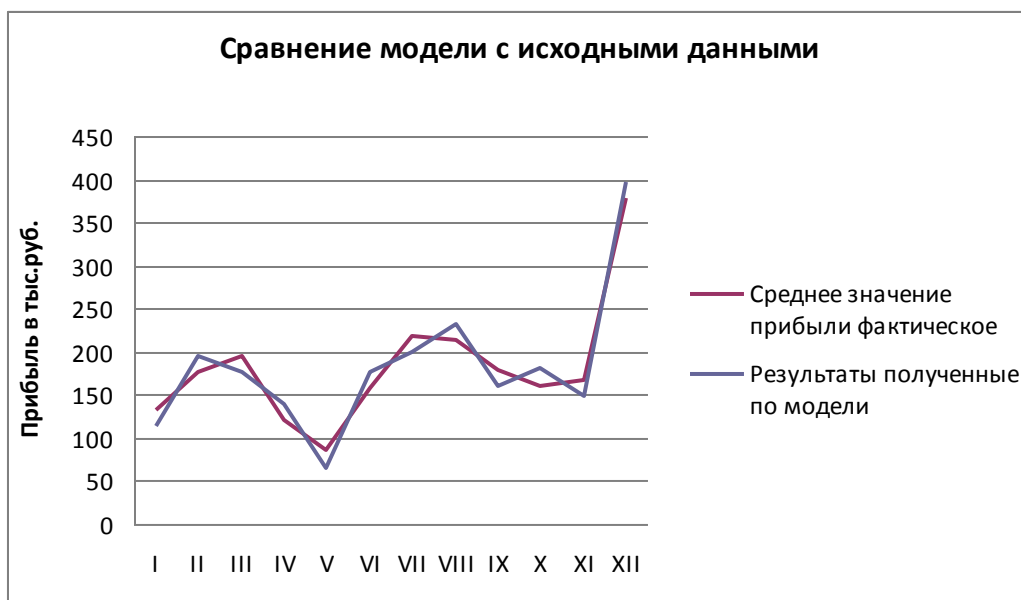
Параметры пятой и шестой гармоник будут соответственно вычислены по следующим формулам:

$$a_5 = -192,612 : 6 = -32,102; \quad a_6 = -227 : 6 = -37,833; \quad b_5 = -110,844 : 6 = -18,474; \quad b_6 = 0 : 6 = 0.$$

Математическая модель будет иметь вид:

$$\hat{y}_t = 182,03 + 20,44 \cos t - 37,526 \sin t + 36,17 \cos 2t - 3,464 \sin 2t - 30,83 \cos 3t - 36 \sin 3t - 23,83 \cos 4t - 38,68 \sin 4t - 32,102 \cos 5t - 18,474 \sin 5t - 37,833 \cos 6t + 0 \sin 6t.$$

Результаты по данной модели представлены в последнем столбце таблицы.



Результаты модели прибыли, рассчитанной на основе среднего значения прибыли за 3 предыдущих года (2009, 2010, 2011), и фактическое значение нанесены на координатную плоскость, где по оси абсцисс откладываются месяцы, а по оси ординат прибыль.

Расчет относительной ошибки аппроксимации 
$$\bar{A} = \frac{1}{n} \sum \left| \frac{y_i - \hat{y}_i}{y_i} \right| * 100\% = 2,8\%$$

показывает, что модель качественная.

#### Список используемой литературы

1. Авдоськина А.В., Ни В.Н., Тумашев В.И. Математика. Раздел: Ряды Фурье. Учебное пособие./ Под редакцией профессора Ни В.Н. – Челябинск: ЧИ (ф) МГУК, 2002. – 36 с.
2. Общий курс высшей математики для экономистов. Учебник. Под редакцией В.И.Ермакова. – М.: ИНФРА, 2001. – 656 с.