УДК 519.644.2

О ВЫЧИСЛЕНИИ ТРЁХМЕРНОГО БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Тутатчиков В.С., Киселев О.И.
научный руководитель – д-р физ.-мат. наук Носков М.В.
Сибирский федеральный университет

В работе рассмотрены алгоритмы вычисления ДПФ, значительно отличающиеся по своей вычислительной сложности: вычисление трехмерного ДПФ при помощи комбинации одномерного быстрого преобразования Фурье (БПФ), а также трехмерное БПФ по аналогу с алгоритмом Кули-Тьюки.

Рассмотрим сигнал f, который является трехмерным периодическим сигналом с периодом 2^s по трем координатам. Отсчёты задаются, как $f(x,y,z)$, где $x,y,z=0:2^s$. Дискретное преобразование Фурье для данного сигнала f задаётся формулой:

$$F(a,b,c)=\sum_{x=0}^{2^s-1}\sum_{y=0}^{2^s-1}\sum_{z=0}^{2^s-1} f(x,y,z)\,e^{\frac{2\pi i(ax+by+cz)}{2^s}} \tag{1}$$

Трехмерное ДПФ Фурье F можно вычислить при помощи одномерных:

$$F(a,b,c)=\sum_{x=0}^{2^s-1}\left[\sum_{y=0}^{2^s-1}\left[\sum_{z=0}^{2^s-1} f(x,y,z)\,e^{\frac{2\pi iax}{2^s}}\right]\cdot e^{\frac{2\pi iby}{2^s}}\right]\cdot e^{\frac{2\pi icz}{2^s}} \tag{2}$$

Суммы в квадратных скобках представляют собой одномерные вычисления ДПФ по трём координатам сигнала f. Преобразуем данную формулу разбиением трех координат на четную и нечетную компоненты:

$$\begin{aligned}
F(a,b,c)&=\sum_{x=0}^{2^s-1}\sum_{y=0}^{2^s-1}\sum_{z=0}^{2^s-1} f(x,y,z)\,e^{\frac{2\pi iax}{2^s}}e^{\frac{2\pi iby}{2^s}}e^{\frac{2\pi icz}{2^s}}=\\
&=\sum_{x_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{y_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{z_1=0}^{2^{s-1}-1} f(2x_1,2y_1,2z_1)\,e^{\frac{2\pi iax_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi iby_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi icz_1}{2^{s-1}}}+\\
&+e^{\frac{\pi ia}{2^s}}\sum_{x_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{y_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{z_1=0}^{2^{s-1}-1} f(2x_1+1,2y_1,2z_1)\,e^{\frac{2\pi iax_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi iby_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi icz_1}{2^{s-1}}}+\\
&+e^{\frac{\pi ib}{2^s}}\sum_{x_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{y_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{z_1=0}^{2^{s-1}-1} f(2x_1,2y_1+1,2z_1)\,e^{\frac{2\pi iax_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi iby_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi icz_1}{2^{s-1}}}+\\
&+e^{\frac{\pi ia}{2^s}}e^{\frac{1\pi ib}{2^s}}\sum_{x_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{y_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{z_1=0}^{2^{s-1}-1} f(2x_1+1,2y_1+1,2z_1)\,e^{\frac{2\pi iax_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi iby_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi icz_1}{2^{s-1}}}+\\
&+e^{\frac{\pi ic}{2^s}}\sum_{x_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{y_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{z_1=0}^{2^{s-1}-1} f(2x_1,2y_1,2z_1+1)\,e^{\frac{2\pi iax_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi iby_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi icz_1}{2^{s-1}}}+\\
&+e^{\frac{\pi ia}{2^s}}e^{\frac{\pi ic}{2^s}}\sum_{x_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{y_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{z_1=0}^{2^{s-1}-1} f(2x_1+1,2y_1,2z_1+1)\,e^{\frac{2\pi iax_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi iby_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi icz_1}{2^{s-1}}}+\\
&+e^{\frac{\pi ib}{2^s}}e^{\frac{\pi ic}{2^s}}\sum_{x_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{y_1=0}^{2^{s-1}-1}\sum_{z_1=0}^{2^{s-1}-1} f(2x_1,2y_1+1,2z_1+1)\,e^{\frac{2\pi iax_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi iby_1}{2^{s-1}}}e^{\frac{2\pi icz_1}{2^{s-1}}}+
\end{aligned} \tag{3}$$

$$+e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} \sum_{x_1=0}^{2^{s-1}-1} \sum_{y_1=0}^{2^{s-1}-1} \sum_{z_1=0}^{2^{s-1}-1} f(2x_1+1, 2y_1+1, 2z_1+1)\, e^{\frac{2\pi i a x_1}{2^{s-1}}} e^{\frac{2\pi i b y_1}{2^{s-1}}} e^{\frac{2\pi i c z_1}{2^{s-1}}} =$$

$$= F_{0,0,0}(a,b,c) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} F_{1,0,0}(a,b,c) + e^{\frac{\pi i b}{2^s}} F_{0,1,0}(a,b,c) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} F_{1,1,0}(a,b,c) +$$

$$+e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{0,0,1}(a,b,c) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{1,0,1}(a,b,c) + e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{0,1,1}(a,b,c) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{1,1,1}(a,b,c),$$

где $a,b,c = 0 : 2^s - 1$.

Можно показать, что $e^{\frac{\pi i a}{2^s}}$ обладает свойством симметрии относительно $a = 2^{s-1}$:

$$e^{\frac{\pi i (2^{s-1}+t)}{2^s}} = e^{\frac{\pi i 2^{s-1}}{2^s}} \cdot e^{\frac{\pi i t}{2^s}} = -e^{\frac{\pi i t}{2^s}} \tag{4}$$

где $t = 0 : 2^{s-1} - 1$. Аналогично, $e^{\frac{\pi i b}{2^s}}$ и $e^{\frac{\pi i c}{2^s}}$ обладают симметрией относительно $b = 2^{s-1}$ и $c = 2^{s-1}$, соответственно. Тогда из (3) и (4) получим:

$$\begin{aligned}
&F(a,b,c) = F_{0,0,0}(a,b,c) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} F_{1,0,0}(a,b,c) + e^{\frac{\pi i b}{2^s}} F_{0,1,0}(a,b,c) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} F_{1,1,0}(a,b,c) +\\
&+e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{0,0,1}(a,b,c) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{1,0,1}(a,b,c) + e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{0,1,1}(a,b,c) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{1,1,1}(a,b,c),\\
&F(a+2^{s-1},b,c) = F_{0,0,0}(a+2^{s-1},b,c) - e^{\frac{\pi i a}{2^s}} F_{1,0,0}(a+2^{s-1},b,c) + e^{\frac{\pi i b}{2^s}} F_{0,1,0}(a+2^{s-1},b,c) -\\
&-e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} F_{1,1,0}(a+2^{s-1},b,c) + e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{0,0,1}(a+2^{s-1},b,c) - e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{1,0,1}(a+2^{s-1},b,c) +\\
&+e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{0,1,1}(a+2^{s-1},b,c) - e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{1,1,1}(a+2^{s-1},b,c),\\
&F(a,b+2^{s-1},c) = F_{0,0,0}(a,b+2^{s-1},c) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} F_{1,0,0}(a,b+2^{s-1},c) - e^{\frac{\pi i b}{2^s}} F_{0,1,0}(a,b+2^{s-1},c) -\\
&-e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} F_{1,1,0}(a,b+2^{s-1},c) + e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{0,0,1}(a,b+2^{s-1},c) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{1,0,1}(a,b+2^{s-1},c) -\\
&-e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{0,1,1}(a,b+2^{s-1},c) - e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{1,1,1}(a,b+2^{s-1},c),\\
&F(a,b,c+2^{s-1}) = F_{0,0,0}(a,b,c+2^{s-1}) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} F_{1,0,0}(a,b,c+2^{s-1}) + e^{\frac{\pi i b}{2^s}} F_{0,1,0}(a,b,c+2^{s-1}) +\\
&+e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} F_{1,1,0}(a,b,c+2^{s-1}) - e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{0,0,1}(a,b,c+2^{s-1}) - e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{1,0,1}(a,b,c+2^{s-1}) -\\
&-e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{0,1,1}(a,b,c+2^{s-1}) - e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{1,1,1}(a,b,c+2^{s-1}),\\
&F(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c) = F_{0,0,0}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c) - e^{\frac{\pi i a}{2^s}} F_{1,0,0}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c) -\\
&-e^{\frac{\pi i b}{2^s}} F_{0,1,0}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} F_{1,1,0}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c) +\\
&+e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{0,0,1}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c) - e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{1,0,1}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c) -\\
&-e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{0,1,1}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c) + e^{\frac{\pi i a}{2^s}} e^{\frac{\pi i b}{2^s}} e^{\frac{\pi i c}{2^s}} F_{1,1,1}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c),\\
&F(a+2^{s-1},b,c+2^{s-1}) = F_{0,0,0}(a+2^{s-1},b,c+2^{s-1}) - e^{\frac{\pi i a}{2^s}} F_{1,0,0}(a+2^{s-1},b,c+2^{s-1}) +
\end{aligned} \tag{5}$$

$$+e^{\frac{\pi ib}{2^s}}F_{0,1,0}(a+2^{s-1},b,c+2^{s-1})-e^{\frac{\pi ia}{2^s}}e^{\frac{\pi ib}{2^s}}F_{1,1,0}(a+2^{s-1},b,c+2^{s-1})-$$
$$-e^{\frac{\pi ic}{2^s}}F_{0,0,1}(a+2^{s-1},b,c+2^{s-1})+e^{\frac{\pi ia}{2^s}}e^{\frac{\pi ic}{2^s}}F_{1,0,1}(a+2^{s-1},b,c+2^{s-1})-$$
$$-e^{\frac{\pi ib}{2^s}}e^{\frac{\pi ic}{2^s}}F_{0,1,1}(a+2^{s-1},b,c+2^{s-1})+e^{\frac{\pi ia}{2^s}}e^{\frac{\pi ib}{2^s}}e^{\frac{\pi ic}{2^s}}F_{1,1,1}(a+2^{s-1},b,c+2^{s-1}),$$
$$F(a,b+2^{s-1},c+2^{s-1})=F_{0,0,0}(a,b+2^{s-1},c+2^{s-1})+e^{\frac{\pi ia}{2^s}}F_{1,0,0}(a,b+2^{s-1},c+2^{s-1})-$$
$$-e^{\frac{\pi ib}{2^s}}F_{0,1,0}(a,b+2^{s-1},c+2^{s-1})-e^{\frac{\pi ia}{2^s}}e^{\frac{\pi ib}{2^s}}F_{1,1,0}(a,b+2^{s-1},c+2^{s-1})-$$
$$-e^{\frac{\pi ic}{2^s}}F_{0,0,1}(a,b+2^{s-1},c+2^{s-1})-e^{\frac{\pi ia}{2^s}}e^{\frac{\pi ic}{2^s}}F_{1,0,1}(a,b+2^{s-1},c+2^{s-1})+$$
$$+e^{\frac{\pi ib}{2^s}}e^{\frac{\pi ic}{2^s}}F_{0,1,1}(a,b+2^{s-1},c+2^{s-1})+e^{\frac{\pi ia}{2^s}}e^{\frac{\pi ib}{2^s}}e^{\frac{\pi ic}{2^s}}F_{1,1,1}(a,b+2^{s-1},c+2^{s-1}),$$
$$F(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c+2^{s-1})=F_{0,0,0}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c+2^{s-1})-$$
$$-e^{\frac{\pi ia}{2^s}}F_{1,0,0}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c+2^{s-1})-e^{\frac{\pi ib}{2^s}}F_{0,1,0}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c+2^{s-1})+$$
$$+e^{\frac{\pi ia}{2^s}}e^{\frac{\pi ib}{2^s}}F_{1,1,0}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c+2^{s-1})-e^{\frac{\pi ic}{2^s}}F_{0,0,1}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c+2^{s-1})+$$
$$+e^{\frac{\pi ia}{2^s}}e^{\frac{\pi ic}{2^s}}F_{1,0,1}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c+2^{s-1})+e^{\frac{\pi ib}{2^s}}e^{\frac{\pi ic}{2^s}}F_{0,1,1}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c+2^{s-1})-$$
$$-e^{\frac{\pi ia}{2^s}}e^{\frac{\pi ib}{2^s}}e^{\frac{\pi ic}{2^s}}F_{1,1,1}(a+2^{s-1},b+2^{s-1},c+2^{s-1}),$$

где $a,b,c=0:2^{s-1}-1$.

Число комплексных умножений алгоритма трёхмерного БПФ по аналогу Кули-Тьюки $7/8\,N^3\log_2 N$ комплексных сложений $3N^3\log_2 N$, в отличие от метода вычисления при помощи комбинации одномерных БПФ: $N^3\log_2 N$ комплексных умножений и $N^3\log_2 N$ комплексных сложений. Для тестирования алгоритма была написана программа на языке С++, реализующая два алгоритма: трехмерное БПФ при помощи комбинаций одномерных БПФ и БПФ по аналогу Кули-Тьюки. Тестирование проводилось на компьютере с процессором Intel Core i5 2400 ГГц, 4 Гб оперативной памяти, операционная система Windows 7. Скорость работы двух алгоритмов засекалась в секундах. Результаты работы программы представлены в таблице.

Таблица 1

Сравнение времени работы алгоритмов трёхмерного БПФ при помощи комбинации одномерных и трёхмерное БПФ по аналогу Кули-Тьюки, в секундах

Размер	БПФ при помощи комбинации 1D БПФ	БПФ по аналогу Кули-Тьюки
32*32*32	0,006	0,002
64*64*64	0,045	0,019
128*128*128	0,298	0,134
256*256*256	2.850	1,225
512*512*512	29,840	10,658

В результате исследовательской работы реализован алгоритм трёхмерного БПФ по аналогу Кули-Тьюки, работающий значительно быстрее алгоритма вычисления трёхмерного при помощи комбинации одномерных БПФ.