УДК 519.24

К ЗАДАЧЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Цепкова М.В.,
научный руководитель канд. техн. наук Сергеева Н.А.
Сибирский федеральный университет

Настоящий доклад посвящен проблеме непараметрической идентификации динамических процессов или идентификации в «широком» смысле. В частности, рассматривается построение модели линейной динамической системы, когда параметрическая структура объекта неизвестна.

На рис.1 представлена схема исследуемого процесса. Введем следующие обозначения: $u(t)$ – измеряемая управляемая входная переменная, $\mu(t)$ – измеряемая неуправляемая входная переменная, $x(t)$ – выходная переменная процесса, которую без нарушения общности, можем считать скалярной, $\xi(t)$ – случайное возмущение с нулевым математическим ожиданием и ограниченной дисперсией, h_t^u, h_t^x – случайные помехи, действующие в каналах измерения входной и выходной переменных процесса ($M(h)=0, D(h)<Const$), u_t^h, x_t^h – измерения входной и выходной переменных процесса соответственно, ИУ – измерительное устройство. В общем случае $u(t)$, $\mu(t)$ являются векторами: $u(t)\in R^k$, $\mu(t)\in R^m$, $\xi(t)\in R$. Для простоты записи будем обозначать измерения входных и выходных переменных u_t^h, μ_t^h, x_t^h через u_i, μ_i, x_i , $i=\overline{1,s}$.

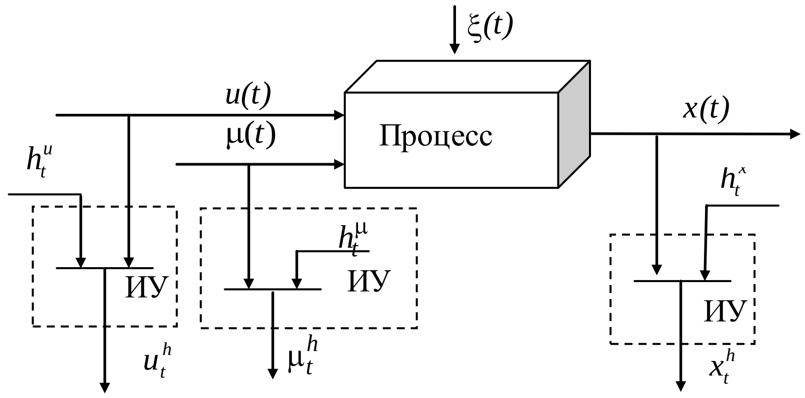

Рис. 1 – Схема динамической системы

Таким образом, $x(t)$ – может быть представлена в виде объективно существующей зависимости: $x(t)=A(u(t),\mu(t),\xi(t),t)$, где A – неизвестный оператор процесса, $u(t)\in R^k, \mu(t)\in R^m, \xi(t)\in R^\lambda$.

Измерение переменных $x(t), u(t)$ и $\mu(t)$ осуществляется со случайными ошибками, имеющими нулевое математическое ожидание и ограниченную дисперсию, плотность вероятности их неизвестна. Обозначим эти наблюдения x_t, u_t, μ_t, $t=1,2...$, здесь t – дискретное время. Исследователь при моделировании подобных процессов преследует цель построения математической модели $\hat{x}(t)=B(u(t),\mu(t),t)$, где B – класс операторов, который определяется на основании имеющейся априорной информации, $\hat{x}(t)$

– выход модели. Ясно, что в этом случае стремятся к близости $\hat{x}(t)$ к $x(t)$ в смысле принятого критерия оптимальности. Проблема моделирования подобных процессов усугубляется недостатком априорной информации об операторе A и высокой размерностью переменных $u(t)$ и $\mu(t)$.

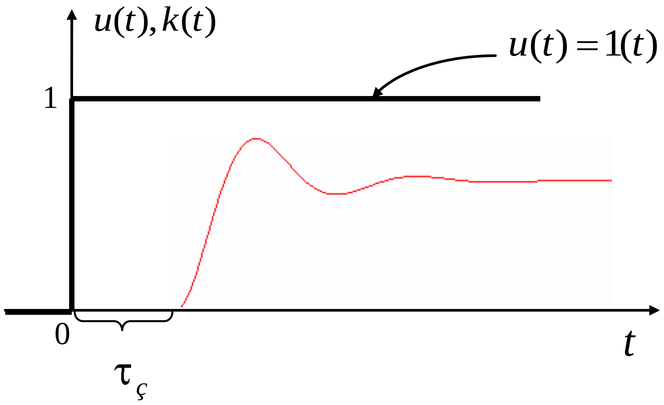

Рис. 2 – Переходная характеристика с запаздыванием

Поскольку эффект запаздывания содержится в самой сущности исследуемого объекта, то поскольку в дальнейшем понадобиться «снятие» переходных характеристик, то оно учитывается по результатам проведенных экспериментов. Из соображений простоты, запаздывание в предыдущих формулах принято равным 0. В частности этот факт иллюстрируется рис.2, где $\tau_ç$ – запаздывание при снятии переходной характеристики.

Так как необходимо получить весовую функцию $h(t)$, на вход линейной динамической системы с нулевыми начальными условиями подается функция Дирака. Необходимость получения весовой функции связана с тем, что в ней содержится полная характеристика объекта. Вход объекта u(t) представляет собой δ-функцию, которая имеет вид системы представленной формулой (1).

$$u(t) = \begin{cases} H,\ t \in [\tau\,;\ \Delta T + \tau]; \\ 0,\ t \notin [\tau\,;\ \Delta T + \tau], \end{cases} \qquad (1)$$

где ΔT – ширина интервала, τ – чистое запаздывание, H – высота ступени.

Входное воздействие $u(t) = \delta(t)$, можно задавать двумя способами: через высоту ступени H и через ширину интервала ΔT.

Первый способ включает в себя определение величины шага через задаваемую высоту ступени H. Вычисляется величина шага из площади прямоугольника: $\Delta T = 1/H$. После определения шага строиться входное воздействие $u(t)$ на всем временном интервале [0, T], где T – конечное время, задаваемое исследователем.

Второй способ заключается в задании ширины интервала ΔT. В этом случае вводится еще и количество интервалов под ступенькой n. Сначала определяется шаг сетки по формуле $\Delta t = ((\Delta T + \tau) - \tau)/n$, где n – количество интервалов под ступенькой. После определения шага сетки необходимо определить высоту ступени. Она определяется через площадь трапеции:

$$H = 2/(\Delta T + (\Delta \grave{O} - 2\Delta t)),\ \text{где}\ \Delta t\ –\ \text{шаг сетки.} \qquad (2)$$

Далее так же определяется входное воздействие на всем временном интервале. После того как входное воздействие $u(t)$ заданно строится реакция на входное воздействие $x(t)$. Выход объекта $x(t)$ описывается зависимостью, выраженной формулой $\tilde{o}(t) = a\tilde{o}(t-1) + b\tilde{o}(t-2) + cu(t)$, где $x(t-1)$ – значение выхода объекта в предыдущий такт времени, $x(t-2)$ – значение выхода объекта в такт времени $(t-2)$, $u(t)$ – вход объекта, $\grave{a}, b, \tilde{n}$ – коэффициенты системы.

На следующем этапе вычислений к весовой функции $h(t)$ добавляется помеха, распределенная по нормальному закону, сгенерированная с помощью прецизионного-генератора (П-генератор), параметрами которого является математическое ожидание равное $m=0$ и среднее квадратичное отклонение $\sigma=0{,}1$.

После того как получена весовая функция, необходимо получить ее оценку, которая строится по следующей формуле:

$$\hat{h}(t)=T\sum_{i=1}^{N} x_i H\quad (t-t_i)/c_s \quad / Nc_s, \tag{3}$$

где x – значение выхода объекта, $H\quad z$ – ядерная функция, N – объем выборки, c_s – коэффициент размытости, удовлетворяющие свойствам сходимости, T – конечное время.

Для того чтобы проверить адекватность полученной оценки весовой функции считается ее относительная ошибка на временном отрезке [0, T]. Оценка рассчитывается по следующей формуле

$$s_h=100/N\sum_{i=1}^{N}|h(t_i)-\hat{h}(t_i)|/|h_{\max}-h_{\min}| \tag{4}$$

Сравниваются оценка весовой функции, полученная по формуле (3) и истинное значение весовой функции.

Далее приведены результаты исследования весовой функции. Рассмотрим различные способы задания δ-функции и получающуюся при этом величину относительной ошибки. В таблице (1) приведены результаты при задании δ-функция через ширину интервала ΔT, в таблице (2) δ-функция задается через высоту ступени H. Эти результаты получены при начальных условиях: конечное время $T=15$, объем выборки $N=150$.

Таблица 1

ΔT	0,1	0,01	0,076	0,3	0,9
n	20	30	30	30	30
s_h, %	1,11	0,52	0,87	2,57	5,45
H	13	111	14	3	1

Таблица 2

H	10	13	110	3	1
s_h, %	2,15	1,86	0,42	3,84	5,6
ΔT	0,1	0,076	0,001	0,3	1

Как видно из таблицы, что при ширине интервала $\Delta T=0{,}9$ относительная ошибка, полученная по формуле(5) получается равной $s_h=5{,}45$ при количестве интервалов под ступенькой $n=30$. Брать ΔT больше этого значения не имеет смысла, так как это приводит к увеличению ошибки.

Сравним полученные результаты графически, оценивается приближенность весовой функции к истинному значению, которое не зависит от способа задания δ-функции. Рассмотрим полученные результаты при ширине интервала $\Delta T=0{,}076$, при такой ширине получались результаты с удовлетворяющей величиной ошибки, которые приведены в таблице(1) и в таблице(2). На рис.3 приведены оба способа задания δ-функции с исходными параметрами, на рис.3а $H=13$, на рис.3б $\Delta T=0{,}076$ и $n=20$. На рис.3а видно, что весовая функция отклоняется от истинного значения, однако, весовая функция, полученная через задание ширины интервала наиболее приближена к истинному значению весовой функции рис.3б.

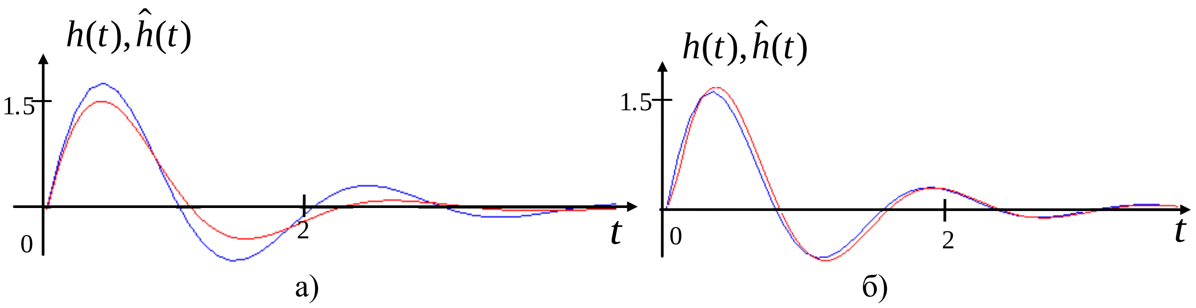

Рис. 3 – δ-функция при $\Delta T = 0{,}076$, $H = 13$

Стремление задать δ-функцию через ширину интервала обосновано тем, что в реальных условиях очень сложно подавать малую ширину интервала, поэтому ищется величина ΔT, которую можно было бы подать на вход, и при которой полученная весовая функция была максимально приближена к истинному значению. Не смотря на то, что при задании δ-функции через высоту ступени получаются хорошие результаты, ширина интервала получается малой и не возможно технологически подать ее на вход.

После того как получена весовая функция максимально приближенная к истинному значению, построим модель объекта, используя интеграл Дюамеля и проверим ее работоспособность. Дискретная форма интеграла Дюамеля при нулевых начальных условиях имеет вид $x(t) = \sum\limits_{i=1}^{t/\Delta\tau} h(t-\tau_i)u(\tau_i)\Delta\tau$, где $h(t)$ – это весовая функция, $u(\tau)$ – входное воздействие, $\Delta\tau$ - шаг дискретизации по времени, $\tau_i = i\Delta\tau$ - значения времени дискретизации.

Исследуемый объект имеет вид:

$$\tilde{o}(t) = 1.67\tilde{o}(t-1) - 0.766\tilde{o}(t-2) + 0.638cu(t)$$

Смоделируем поведение объекта при входном воздействии, которое описывается функцией $U(t) = 7.4e^{0.48t}$.

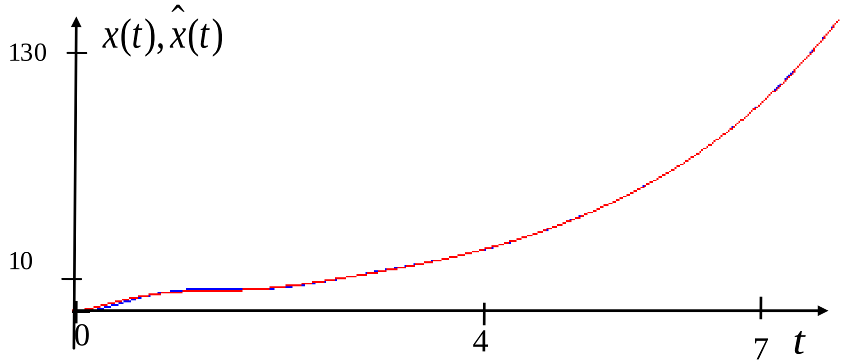

Рис. 4 – Результат моделирования

При данном входном воздействии модель адекватна объекту. На рис.4 представлены линии соответствующие линии объекта и модели, как видно модель полностью повторяет поведение объекта. Величина относительной ошибки 0.011.

В условиях реального функционирования объекта невозможно подать δ-функцию, так как она представляет собой бесконечный сигнал. При этом, если использовать аппроксимацию δ-функции и подавать ее на вход объекта, то возможно снять весовую функцию. Построенные модели на основе снятой весовой характеристики могут быть адекватны процессу.