УДК 519.234

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЗАВИСИМЫМИ ВХОДНЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Чжан Е.А.,
научный руководитель канд. тех. наук Сергеева Н.А.
Сибирский федеральный университет

Идентификация стохастических объектов в условиях малой априорной информации является актуальной задачей. Проблемой является малое количество априорной информации. Наличие статистически зависимых входных переменных приводит к особенностям при решении задач параметрической идентификации.

Постановка задачи. При изучении объектов (технических и производственных систем, процессов и явлений) основной задачей является построение их моделей с целью последующего управления.

Рассмотрим общую схему исследуемого процесса (рис. 1).

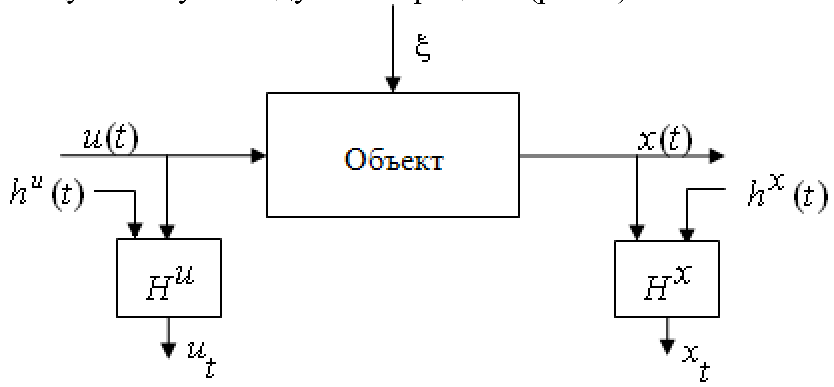

Рисунок 1 – Общая схема исследуемого процесса

Векторное управляющее воздействие, действующее на объект, обозначено $u(t) \in \Omega(u) \subset R^k$; $x(t) \in \Omega(x) \subset R$ – выходная переменная процесса, ξ – векторное случайное воздействие. Таким образом, исследуемый процесс может быть описан уравнением:

$$x(t) = A(u(t-\tau), \xi). \qquad (1)$$

где τ – запаздывание, A – оператор объекта. В случае если запаздывание известно, то в дальнейших формулах его можно не учитывать, используя сдвиг в матрице наблюдений входных-выходных переменных.

Измерения входных-выходных переменных $u(t)$, $x(t)$ в дискретное время – u_t, x_t. Контроль переменных (x,u) осуществляется через интервал времени Δt, то есть $\{x_i, u_i, i = \overline{1,N}\}$ – выборка измерений переменных процесса, N – объем выборки, H^u, H^x – каналы связи, соответствующие различным переменным, включающие в себя средства контроля, $h^x(t)$ – случайные помехи измерений выходных переменных процесса с нулевыми математическими ожиданиями и ограниченной дисперсией, $h^u(t)$ – помехи при измерении входных переменных.

Особенность задачи идентификации состоит в том, что компоненты вектора входных переменных стохастически зависимы. Это обстоятельство делает структуру процессов, протекающих в пространстве входных-выходных переменных, «трубчатой».

Идентификация стохастических объектов с зависимыми входными параметрами. Рассмотрим процесс, часто имеющий место в практике. Сущность его состоит в том, что из-за стохастической зависимости компонент вектора входных переменных, которая почти всегда неизвестна, исследуемый процесс имеет «трубчатую» структуру. Пусть $u_1 \in R^1$, $u_2 \in R^1$, $x \in R^1$ (рис. 2). Интервалы изменения $(u_1, u_2, x) \in R^3$ всегда известны из практических соображений. Без нарушения общности выделим в R^3 единичный куб. Реально протекающий процесс же принадлежит подобласти $\Omega^H(u_1, u_2, x) \subset \Omega(u_1, u_2, x)$, которая никогда неизвестна.

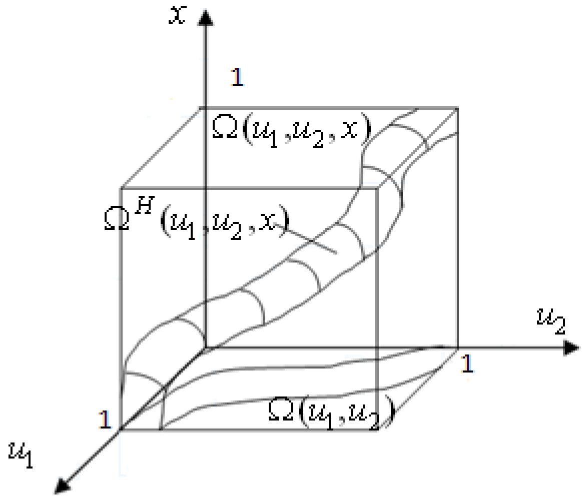

Рисунок 2 – Процесс, протекающий в «трубке»

Таким образом, $u_1 \in \ 0;1$, $u_2 \in \ 0;1$, $x \in \ 0;1$, а триада $(u_1, u_2, x) \in \Omega^H(u_1, u_2, x)$. Ясно, что не каждое значение триады (u_1, u_2, x), полученной в эксперименте или измеренной на реальном процессе, будет принадлежать единичному кубу $\Omega(u_1, u_2, x)$. Следует отметить, что в теории идентификации области $\Omega(u_1, u_2, x), \Omega(u_1, u_2)$, $\Omega(u_1)$, $\Omega(u_2)$, $\Omega(x)$ всегда известны, а область $\Omega^H(u_1, u_2, x)$ неизвестна никогда. Мы рассматриваем статический объект. В случае стохастической независимости входных переменных процесса, $\Omega^H(u_1, u_2, x)$ совпадает с $\Omega(u_1, u_2, x)$, т.е. $\Omega^H(u_1, u_2, x) = \Omega(u_1, u_2, x)$.

Если исследуемый процесс имеет «трубчатую» структуру, то параметрические модели необходимо подкорректировать следующим образом:

$$\hat{x}_s(u) = f(u, \alpha_s) I_s(u), \tag{2}$$

где индикатор $I(u)$ имеет вид:

$$I(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u \in \Omega^H(u); \\ 0, & \text{если } u \overline{\in} \Omega^H(u). \end{cases} \tag{3}$$

Численное моделирование «трубчатых» процессов. При имитационном моделировании помеха на выход объекта накладывается случайным образом. Для генерации выборки случайной величины был использован П-генератор случайных чисел по нормальному закону с заданными параметрами.

Рассмотрим объект, у которого 10 входов, 1 выход, причем все входы зависят от одного. Входные воздействия имеют нелинейную структуру, значения $u_i \in [0;3], i = \overline{1,k}$.

В классификации «трубчатых» процессов данный объект представляет собой линию в пространстве переменных. Выход объекта имеет вид:

$$x\ \ u\ = 2\sin u_1 + 0.3u_2^3 + u_3 - 0.6u_4 + 0.3u_5 + \\ + u_6 + 0.5u_7 + 0.2u_8 + 0.3u_9 - 0.04u_{10}. \tag{4}$$

Примем непараметрическую оценку регрессии в качестве модели:

$$f\quad u\;=\sum_{i=1}^{N} x_i \prod_{j=1}^{p} F\left(\frac{u_i - u_{ij}}{c_s}\right) \Bigg/ \sum_{i=1}^{N} \prod_{j=1}^{p} F\left(\frac{u_i - u_{ij}}{c_s}\right). \qquad (5)$$

Относительная оценка аппроксимации:

$$I / \sigma^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (x_i - f_i)^2 \Bigg/ \sum_{i=1}^{N} (x_i - m_x)^2}. \qquad (6)$$

Результаты моделирования при среднеквадратичном отклонении ошибки $\sigma = 0.5$ и выборке $N = 200$ показаны на рисунке 3, где $f(u)$ – значение модели (красные крестики), $x(u)$ – значение объекта (черные окружности) и $x_\zeta(u)$ – значение объекта с аддитивной помехой (синие ромбы) в каждой точке выборки (i – порядковый номер точки). Фактически, выход объекта $x(u)$ зависит от одного входа, мы имеем линию в пространстве. Как видно из графика (рис. 3), модель достаточно хорошо описывает поведение объекта, что доказывает малое значение ошибки (0.04391) .

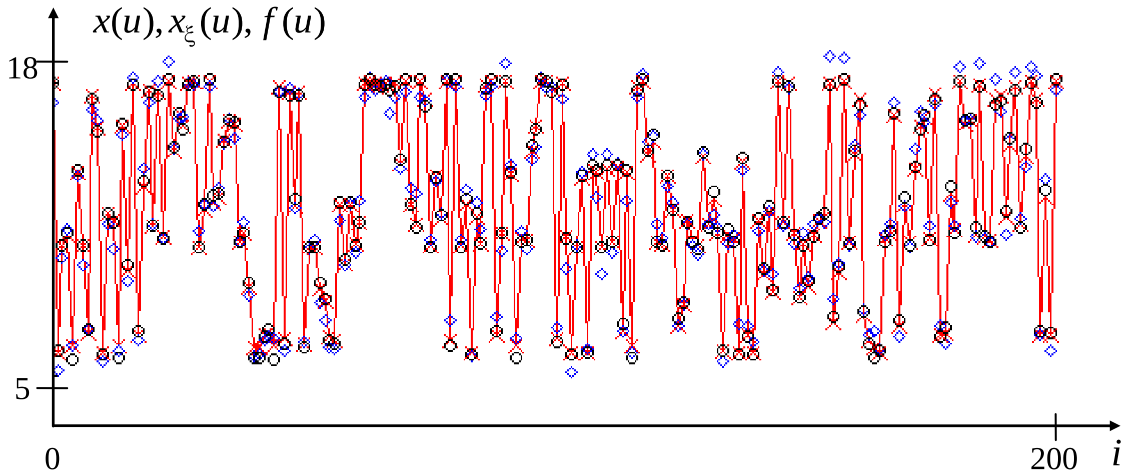

Рисунок 3 – Результаты моделирования при одной независимой входной переменной

Теперь сделаем еще одну переменную независимой: $u_2 \in\ 0;3$. Проекция – линия «размывается» в пространстве, и получается плоскость (рис. 4). Ошибка аппроксимации в этом случае больше при тех же параметрах σ и N получилась больше (0.112316).

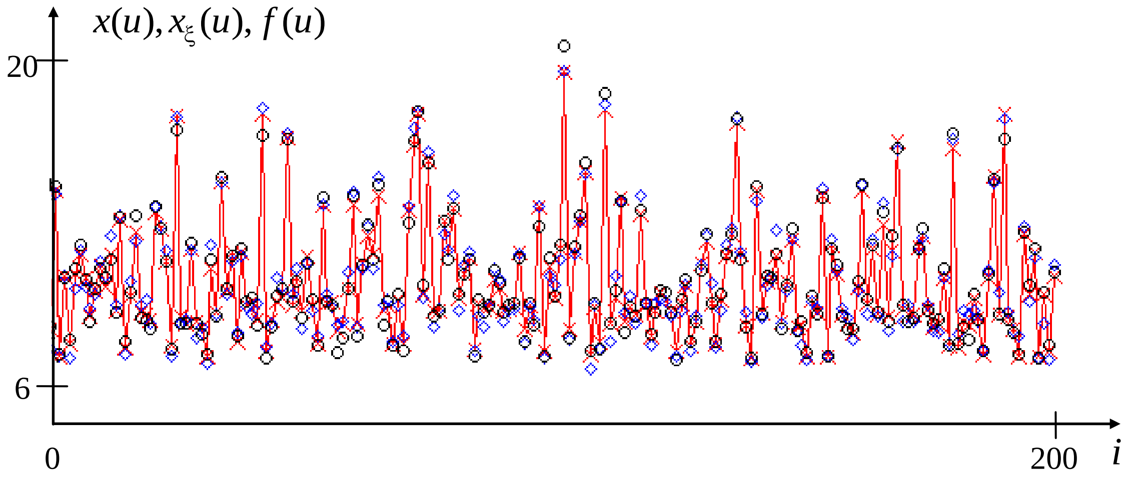

Рисунок 4 – Результаты моделирования при двух независимых входных переменных

Таблица 1

N	σ	*Ошибка*
200	0.1	0.042969
250	0.1	0.035708
500	0.1	0.011906
200	0.5	0.112316
250	0.5	0.096165
500	0.5	0.078967

Результаты численных экспериментов при моделировании объекта (4), имеющего 2 (из 10) независимых входов представлены в таблице 1. Относительная ошибка (6) уменьшается с ростом выборки. Оценка тем лучше, чем меньше ошибка и больше выборка.

Вычислительный эксперимент при параметрическом моделировании объектов с независимыми входными переменными. При параметрической идентификации необходимо выбрать уравнение модели. Для настройки параметров модели был использован метод наименьших квадратов (МНК). Покажем, что параметрический подход данную задачу не решит, так как необходимо большое количество априорной информации.

Теперь рассмотрим объект (4), имеющий 10 входов и 1 выход, где $u_1, u_2, ..., u_{10} \in [0;3]$.

Необходимо получить модель исследуемого процесса на основе выборки измерений входных-выходных переменных. Наиболее распространенной является параметрическая идентификация (идентификация в «узком» смысле).

Рассмотрим модель, структура которой не совпадает со структурой объекта:

$$f(u) = \alpha_1 \sin u_1 + \alpha_2 u_2^3 + \alpha_3 u_3 + \alpha_4 u_4 + \alpha_5 u_5 +$$
$$+\alpha_6 u_6 + \alpha_7 u_7 + \alpha_8 u_8 + \alpha_9 u_9 + \alpha_{10} u_{10}. \qquad (7)$$

Таблица 2

N	σ	*Ошибка*
1000	0.1	0.63971
100000	0.1	0.60979
1000000	0.1	0.60724
1000	0.5	0.64297
100000	0.5	0.61207
1000000	0.5	0.60966

Результаты моделирования представлены в таблице 2. Даже при объеме выборки $N = 10^6$ ошибка очень большая, что говорит о недостатке данных и неудовлетворительной модели.

На основе ряда экспериментов можно сделать вывод: МНК наилучшим образом подбирает коэффициенты модели, если структура объекта известна или угадана очень близко к истинному процессу. В таком случае, достаточно небольшого объема выборки в условиях помех. Также при малой размерности системы можно добиться хорошей относительной оценки, повышая объем выборки. При построении многомерной модели с неизвестной структурой объекта нужны выборки порядка 10^6 и более. В реальности нет возможности оперировать такими выборками. В случае, когда структура объекта не угадана, оценка параметров модели не приведет к желаемому результату, адекватность модели процессу будет неудовлетворительной.

Заключение. Фактически, единственным случаем, при котором возможно построить модель процесса, особенностью которого является малое отношение между размерностью входного воздействия и объемом выборки, является наличие «трубчатой» структуры. В противном случае, при независимых входных переменных объекта, размерность которого высока, малом количестве априорной информации и малом объеме экспериментальных данных, при отсутствии уравнения объекта построить модель не удается.