УДК 518.61

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Браславская О.Б.,
Научный руководитель канд. физ.-мат. наук Гендрина И.Ю.
Томский государственный университет

Фундаментом теории переноса изображения в рассеивающих средах являются два раздела современной науки: теория линейных систем и теория переноса излучения.

Теория линейных систем позволяет выделить рассеивающуюся среду как автономный элемент единой системы передачи изображения и определить передаточные характеристики, необходимые для описания процесса переноса изображения в ней (функция размытия, оптическая передаточная функция и т.д.).

Теория переноса излучения накопила богатый арсенал приближенных решений для расчета характеристик световых полей. Одним из основных методов, обеспечивающих получение конкретных инженерных решений, является малоугловое приближение (МУП).

Для описания процесса распространения света в среде достаточно знания величин показателей рассеяния и поглощения, а также индикатрисы рассеяния.
κ — коэффициент пропорциональности, который называется *показателем поглощения.*
$\sigma(\beta)$ — коэффициент пропорциональности, называемый *показателем рассеяния в направлении* β.
$x(\beta) = \sigma(\beta)/\sigma$ — *индикатриса* рассеяния - *относительное* угловое распределение силы света излучения, рассеянного элементарным объемом. Познакомившись с оптическими параметрами элементарного объема, определяющими распространение света в рассеивающих средах, запишем уравнение переноса излучения:

$$\frac{dI(R,n)}{dl} = -\varepsilon I(R,n) + \frac{\sigma}{4\pi}\iint I(R,n')x(n,n')dn' + B(R,n) \qquad (1)$$

где $B(R,n)$ – функция, характеризующая мощность излучения единицы объема среды в единичный телесный угол в направлении **n** и называется *функцией источников*.

Решая уравнение переноса малоугловым приближением, получим важные характеристики:

$$S(z) = \exp(-\int_0^z (\kappa(z') + \sigma(z') * a(z'))dz') \qquad (2)$$

– освещенность среды при облучении бесконечно широким источником.

Если среда однородна, то

$$S(z) = e^{-(1-\Lambda F)\tau}, \qquad (3)$$

$F = 1 - a$ — доля света, рассеянного в элементарном акте вперед.

Введем некоторые понятия теории линейных систем: оптическую передаточную функцию (ОПФ) среды и функцию размытия точки (ФРТ).

$$S(\upsilon, z) = \exp(-\int_0^z (\varepsilon(z-\xi) - \sigma(z-\xi)x(\upsilon\xi, z-\xi))d\xi) \qquad (4)$$

Численно посчитав этот интеграл в среде matlab, мы заметили, что с увеличением размеров малоугловой зоны, ОПФ среды увеличивается (рис.1), а с увеличением высоты слоя, наоборот, уменьшается (рис.2).

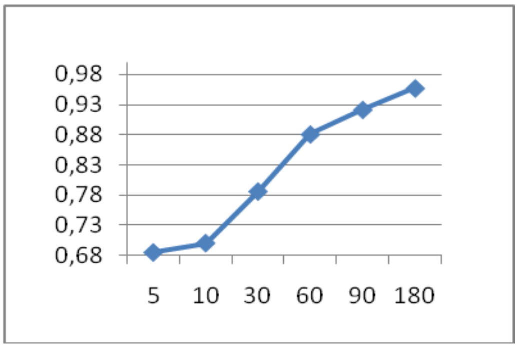

Рис.1. ОПФ среды в зависимости от размеров угловой зоны

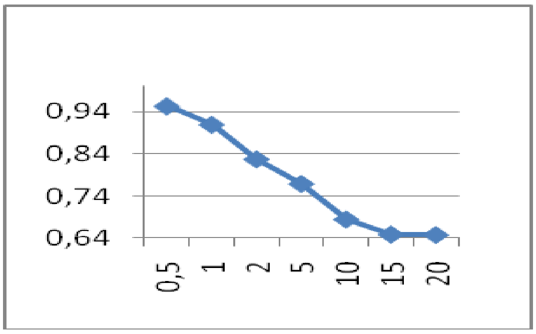

Рис.2. ОПФ среды при различных частотах

Если оптические характеристики среды не зависят от глубины, то для ОПФ слоя найдем

$$S(\upsilon, z) = \exp(-\varepsilon z + \sigma \int_0^z x(\upsilon\xi)d\xi) \quad (5)$$

$$S(r, z) = 2\pi \int_0^\infty S(\upsilon, z) J_0(\upsilon r)\upsilon d\upsilon \quad (6)$$

Рассмотрим модель: источник - рассеивающая среда – приемник.

Если среды нет, то изображение объекта совпадает с самим объектом. А если среда есть, которая описывается ОПФ или ФРТ в МУП, то изображение можно получить двумя способами.

Предположим, что входным сигналом системы является точечная масса $\delta(x - x_1)\delta(y - y_1)$, расположенная в точке (x_1, y_1). Результирующий выходной сигнал будет функцией x, y и параметров x_1, y_1:

$$L[\delta(x - x_1)\delta(y - y_1)] = h(x, y; x_1, y_1) \quad (7)$$

Это функция называется точечно-импульсной реакцией или функцией рассеяния точки. Другими словами мы получили отклик системы на точечную массу. Так как произвольная функция $f(x, y)$ может быть представлена как суперпозиция (интеграл) точечных масс, то результирующий выходной сигнал равен

$$g(x, y) = \iint f(\xi, \eta) h(x, y, x_1, y_1) d\xi d\eta \quad (8)$$

- изображение объекта (первый способ).

Есть другой способ. Иногда удобнее рассматривать объект в частотной области. Если к нему применить обратное преобразование Фурье, то получим изображение в пространственной области.

Для системы с круговой симметрией используют прямое и обратное преобразование Ганкеля в прямой и пространственной частотной области.

Сравнивая изображения, полученные с помощью преобразования Ганкеля, аналитическим и численным интегрированием в среде matlab, получаем графики, совпадающие в пределах погрешности (рис.3)

Таблица 1

Изображения, полученные двумя способами

Высоты	Применение прямого преобразования Ганкеля	Применение обратного преобразования Ганкеля к объекту в частотной области
4	0,2693	0,2573
4,5	0,2396	0,2319
5	0,1697	0,1645
5,5	0,1523	0,1464
6	0,1479	0,1417
6,5	0,1376	0,1318
7	0,1233	0,1186
7,5	0,116	0,1126
8	0,125	0,1216
8,5	0,1202	0,1155
9	0,0964	0,0934

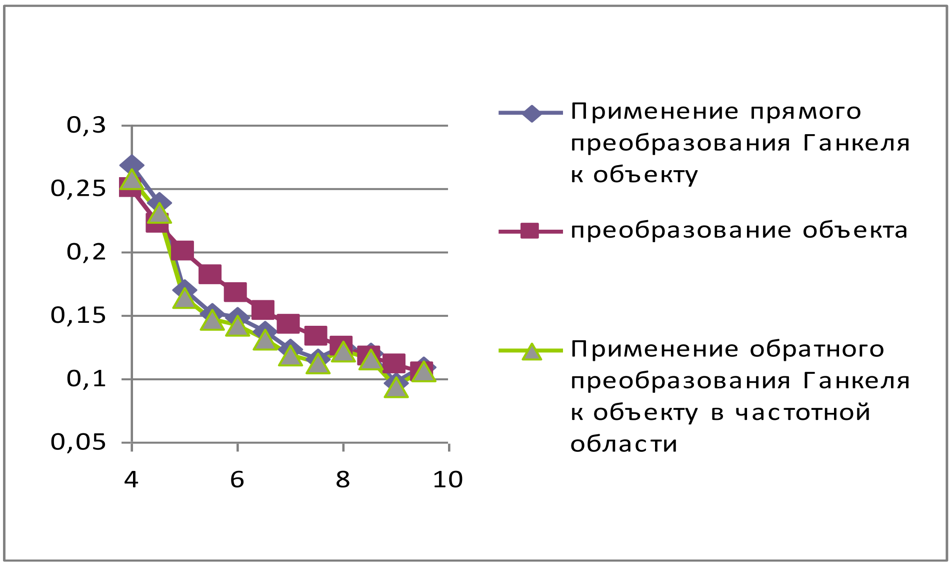

Рис.3. Результаты применения преобразования Ганкеля

Таким образом, в рамках теории линейных систем и теории переноса излучения построены изображения тестовых объектов, проведена верификация программы.