УДК 539.3

УПРАВЛЕНИЕ СТРУКТУРАМИ АРМИРОВАНИЯ ПЛОСКИХ КОНСТРУКЦИЙ В БИПОЛЯРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Панкрац Д.А.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доц. Федорова Н.А.
Сибирский Федеральный Университет

Круглые пластины, круговые и эксцентрические кольца широко применяются в качестве важнейших элементов конструкций ответственного назначения в различных отраслях промышленности. Использование современных композиционных материалов и возможность управления их внутренней структурой открывает широкие перспективы по улучшению и оптимизации создаваемых конструкций.

В работах [1,2] показано влияние сложного нагружения на распределение силовых линий полей напряжений в однородном эксцентрическом кольце. На рис. 1-3 приведены контурные графики для компонент напряжений σ_ξ, σ_η, $\sigma_{\xi\eta}$ в биполярной системе координат при неравномерной нагрузке на граничном контуре. Для распределения данного напряжения необходимо вводить специальные структуры армирования, которые в определенной мере были бы согласованы с характером полей градиентов напряжений.

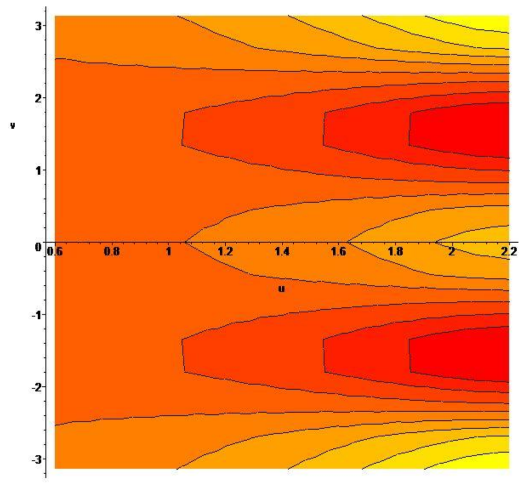

Рисунок 1. Контурный график компоненты напряжения σ_ξ

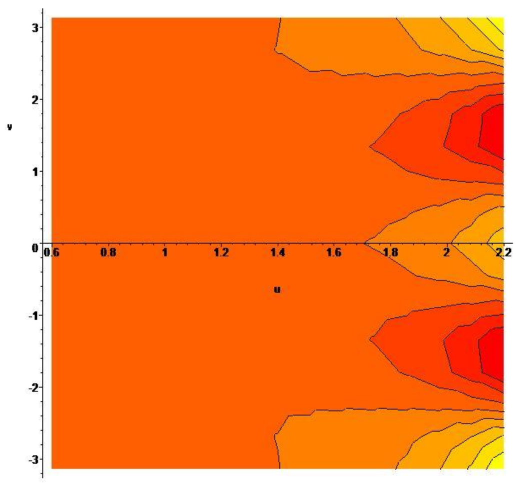

Рисунок 2. Контурный график компоненты напряжения σ_η

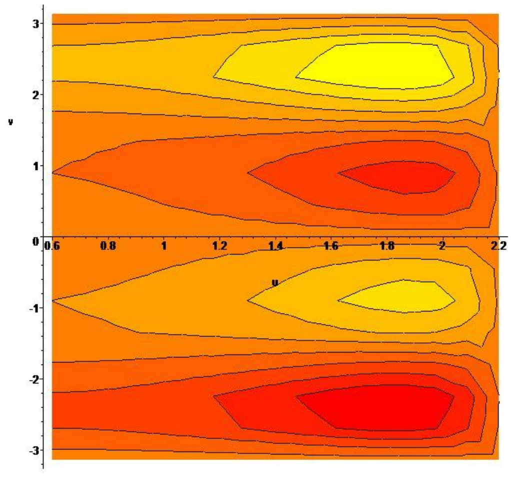

Рисунок 3. Контурный график компоненты напряжения $\sigma_{\xi\eta}$

Волокнистое армирование позволяет использовать новые принципы проектирования и изготовления изделий, основанные на том, что материал и изделие создаются одновременно в рамках одного и того же технологического процесса. В результате получается материал с новыми свойствами. Изучить и предсказать эти свойства можно с помощью математического моделирования на основе структурного подхода.

Структурный подход характеризуется тем, что коэффициенты матрицы упругости являются функционалами от параметров исходного волокнистого композита: углов армирования, интенсивности армирования, размеров отверстия кольца и т.д.

Эксцентрическое кольцо в биполярной системе координат вводится двумя окружностями, описываемыми уравнениями $\alpha_1 = const, \alpha_2 = const$.

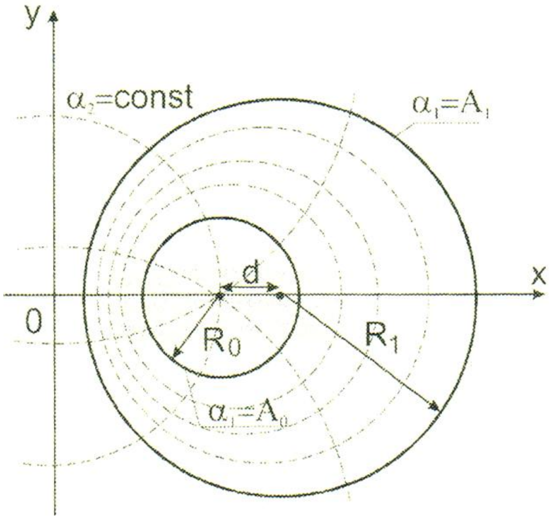

Рисунок 4. Эксцентрическое кольцо в биполярной системе координат ξ, η

Уравнения равновесия в биполярных ортогональных криволинейных координатах для плоского случая имеют вид:

$$\frac{\partial(H_2\sigma_\xi)}{\partial\xi} + \frac{\partial\left(H_1\sigma_{\xi\eta}\right)}{\partial\eta} + \frac{\partial H_1}{\partial\eta}\sigma_{\xi\eta} - \frac{\partial H_2}{\partial\xi}\sigma_\eta + H_1H_2\phi_1 = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial(H_2\sigma_{\xi\eta})}{\partial\xi} + \frac{\partial\left(H_1\sigma_\eta\right)}{\partial\eta} + \frac{\partial H_2}{\partial\xi}\sigma_{\xi\eta} - \frac{\partial H_1}{\partial\eta}\sigma_\eta + H_1H_2\phi_2 = 0,$$

где ϕ_1, ϕ_2 - контравариантные компоненты вектора массовой силы, H_1, H_2 – коэффициенты Ламе, которые в данной системе координат имеют вид:

$$H_1 = H_2 = \frac{a}{ch\,\xi + \cos\eta}.$$

Система записана относительно физических компонент тензоров напряжений.

Условие постоянства сечения волокон выражается формулой:

$$div\bar{\omega}_m = 0$$

или в развернутом виде:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(H_2\omega_m\cos\varphi_m) + \frac{\partial}{\partial\eta}(H_1\omega_m\sin\varphi_m) = 0,$$

где ω_m - интенсивность армирования m-го семейства волокон, φ_m - углы армирования. Интенсивность армирования является некоторой функцией координат ξ, η имеющей ограничение $0 < \omega_m < 0.7$.

Деформации в волокне находятся по структурной модели:

$$\varepsilon_\xi l_{m1}^2 + \varepsilon_\eta l_{m2}^2 + 2\varepsilon_{\xi\eta}l_{m1}l_{m2} = \varepsilon_m^0, \quad (2)$$

В (2) использованы обозначения: $l_{m1} = \cos(\varphi_m)\,, l_{m2} = \sin(\varphi_m)$, ε_m^0 – деформация в волокне.

В случае рассматриваемой плоской задачи для биполярных ортогональных криволинейных координат уравнение совместности деформаций примет вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\xi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_\eta}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} - 2\varepsilon_{\alpha\beta}\left(\Gamma_{11}^{\alpha}\Gamma_{22}^{\beta} - \Gamma_{12}^{\alpha}\Gamma_{12}^{\beta}\right) + 2\Gamma_{22}^{\alpha}\varepsilon_{\xi\alpha} + 2\Gamma_{11}^{\alpha}\varepsilon_{\eta\alpha} - 4\Gamma_{12}^{\alpha}\varepsilon_{\xi\eta\alpha} = 0, (3)$$

где Γ_{jn}^{m} – символы Кристоффеля второго рода.

Из (1) и (3) получим замкнутую разрешающую систему уравнений относительно деформаций:

$$C_1\frac{\partial^2 \varepsilon_\eta}{\partial \xi^2} + C_2\frac{\partial^2 \varepsilon_\xi}{\partial \eta^2} + C_3\frac{\partial^2 \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi \partial \eta} + C_4\frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \xi} + C_5\frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \eta} + C_6\frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \xi} + C_7\frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \eta} + C_8\frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi} + C_9\frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \eta} + C_{10}\varepsilon_\xi + C_{11}\varepsilon_\eta + C_{12}\varepsilon_{\xi\eta} = 0,$$

$$a_{11}\frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \xi} + a_{12}\frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \eta} + a_{13}\frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \xi} + a_{14}\frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \eta} + a_{15}\frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi} + a_{16}\frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \eta} + F_1\left(H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,\xi}, \varphi_{1,\eta}, \varphi_{2,\xi}, \varphi_{2,\eta}\right) + H_1H_2\phi_1 = 0,$$

$$a_{21}\frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \xi} + a_{22}\frac{\partial \varepsilon_\xi}{\partial \eta} + a_{23}\frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \xi} + a_{24}\frac{\partial \varepsilon_\eta}{\partial \eta} + a_{25}\frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \xi} + a_{26}\frac{\partial \varepsilon_{\xi\eta}}{\partial \eta} + F_2\left(H_1, H_2, \omega_1, \omega_2, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_{1,\xi}, \varphi_{1,\eta}, \varphi_{2,\xi}, \varphi_{2,\eta}\right) + H_1H_2\phi_2 = 0.$$

где C_i, a_{ij} – коэффициенты, зависящие от коэффициентов Ламе, угла и интенсивности армирования и физических и химических свойств материала. Для анализа типа данной системы уравнений в частных производных использовался детерминантный метод [3]. Получено, что данная система является системой эллиптического типа и при задании краевых условий она имеет единственное решение.

В настоящие время проводится работа по моделированию и изучению свойств плоского эксцентрического кольца, армированного семейством лемнискат Бернулли, в биполярной системе координат. Схематический внешний вид кольца представлен на рисунке 5.

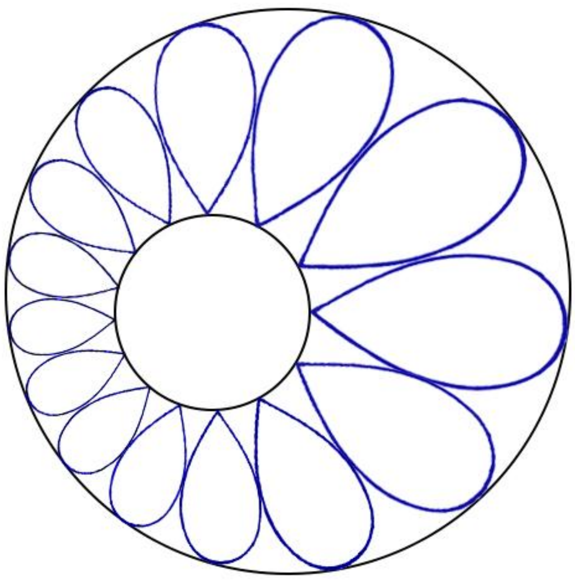

Рисунок 5. Схематический внешний вид эксцентрического кольца, армированного семейством лемнискат Бернулли

Список использованных источников

1. Немировский Ю.В., Федорова Н.А. Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов. Красноярск: СФУ, 2010. 136 с.
2. Федорова Н.А. Моделирование деформирования плоских конструкций со сложными криволинейными структурами армирования // Вестник Сиб.гос.аэрокосмич.ун-та Вып. 3(36). Красноярск, 2011. С. 92-98.
3. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости. М.:Гостехиздат, 1950. - 232 с.