УДК 517.977.1

ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ И МИНИМАКСНОГО МЕТОДА В ЗАДАЧАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рогалев А.А.
научный руководитель д-р физ.-мат. наук Носков М.В.
Сибирский Федеральный университет

Для определения орбиты по измерениям с высокой точностью традиционно используется классический метод наименьших квадратов (НК), либо какая-то его модификация. Обоснованием для такого решения являются оптимальные свойства оценок параметров, получаемых эти методом. При некоррелированных во времени ошибках измерений, имеющих гауссово распределение, оценка НК среди всех оценок (как линейных, так и нелинейных) наиболее точна. Однако при коррелированных во времени ошибках измерений, либо при негауссовских ошибках, либо при неизвестных (частично или полностью) вероятностных характеристиках ошибок измерений традиционные методы могут быть не самыми точными и эти методы не дают корректной оценки точности получаемых значений.

Современные средства обработки косвенных измерений позволяют получать результаты с очень высокой точностью до 10^{-6}. Для того, чтобы не потерять эту точность нужно иметь возможность вычислять пространственные положения ИСЗ с методической точностью, по крайней мере, в три раза превышающей точность наблюдений.

Особенно это важно для решения задачи предупреждения опасных ситуаций в космическом пространстве. В системе контроля космического пространства рассчитывается вероятность столкновения p_c при сближениях двух объектов в будущем, по которой принимаются решения. При этом в подавляющей части случаев на самом деле столкновения не будет («ложная тревога») и поэтому эти меры будут излишними. Зато в тех исключительных случаях ,когда столкновение должно было быть, они позволят избежать его. В этой ситуации надо стремиться к тому, чтобы ложных тревог было как можно меньше.

Следует отметить, что МНК является наиболее изученным среди всех методов оценивания результатов наблюдений. Это объясняется тем, что в ряде случаев механизм возникновения ошибок состоит в суммировании большого числа элементарных ошибок с приблизительно одинаковыми дисперсиями, что позволяет сделать предположение о нормальном законе распределения этих ошибок. Применение метода максимального правдоподобия к отысканию неизвестных параметров в этих условиях приводит к определенной вычислительной схеме – МНК.

Известно, что каждое косвенное измерение накладывает определенную связь (условие) на совокупность на совокупность интересующих параметров $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N$:

$$d_i = \xi_i(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_N) + \Delta_i, i = 1, 2, ..., n$$

Здесь d_i – результат *i*-го измерения, содержащий случайную ошибку; d_i – вектор размерности N, чаще всего измеряется несколько косвенных измерений, $\xi_i(\theta_1, ..., \theta_N)$ – некоторая известная векторная функция от неизвестных параметров, а разность $\Delta_i = d_i - \xi_i(\theta_{1,calc}, \theta_{2,calc}, ..., \theta_{N,calc})$ – вектор невязки *i*-го измерения. При вычислении невязки вместо разности компонент вектора состояния и вектора измерений подставляется разность между двумя вычисленными значениями вектора измерений. Совокупность всех уравнений типа (6) образует фундаментальную систему уравнений. Поскольку точность отдельных измерений и точность отображения реальных связей с помощью соотношения $\xi_i(\theta_1,....,\theta_N)$ различны, то каждому уравнению ставят в соответствие некоторое число, определяющее его ценность и называемое весом данного уравнения.

Оценками, получаемыми методом наименьших квадратов (МНК – оценками), называется совокупность значений $\theta_1,\theta_2,...,\theta_N$, обращающих в минимум взвешенную сумму квадратов невязок:

$$\Phi(\theta_1,\theta_2,...,\theta_N)=\sum_{i=1}^{n} p_i\left[d_i-\xi_i(\theta_1,\theta_2,...,\theta_N)\right]^2.$$

Для многих задач ошибки единичных измерений объектов в космическом пространстве ограничены сверху определенными константами и имеют неизвестное распределение, которое хорошо аппроксимируется равномерным законом. Эти результаты не соответствуют предположениям, при которых доказаны оптимальные свойства оценок метода НК.

Можно отметить, что М.Л. Лидов, П.Е.Эльясберг и их ученики при ограниченных ошибках измерений нашли оптимальный по критерию НК состав измерений для наименее благоприятных значений ошибок измерений в случае негауссовости ошибок измерений.

В докладе проводится сравнение нестатистических алгоритмов, минимизирующих ошибку алгоритма $e(x,y)=\|A(y)-S(x)\|$, где S – известная функция, определяемая моделью движения, x – параметры орбиты, y – измерение, $A(y)$ – оценочная функция решения (алгоритм), отображающая пространство измерений в решающее пространство Z, дающее аппроксимацию решающего элемента $z=S(x)$ измерением y и метода НК. Сравнение алгоритмов обеих подходов выполняется статистическим моделированием. Моделируются различные варианты получения радиолокационных измерений по космическому объекту, отличающихся между собой показателем информативности – числом проходов космического объекта через зону одного или нескольких радаров. Траектории космического объекта характеризуются следующими параметрами – эксцентриситет $e\approx 0$, наклонение $i\approx 57°$, высоты над Землей $h\approx 800$ км и $h\approx 1500$ км, отношение площади к массе космического аппарата постоянно и равно 0.01 . Модель движения – гравитационные возмущения от Земли, Луны и Солнца, давление солнечной радиации, атмосферные возмущения.

При решении многих задач, в которых требуется определять прогнозное положение космического объекта с высокой точностью целесообразно применять алгоритмы нестатистического подхода, полученные в предположении ограниченности ошибок измерений известными константами и возможности линеаризации рассматриваемой задачи.

Большая полнота сведений о погрешностях исходных данных, используемых при построении алгоритма фильтрации по методу наименьших квадратов, обеспечивает преимущество метода наименьших квадратов по сравнению с методом минимакса. Однако в том случае, когда эти сведения оказываются ошибочными, использование метода наименьших квадратов может привести к неоправданно оптимистическим оценкам точности получаемых результатов, а также к ошибкам при выборе оптимальной стратегии. Этот недостаток МНК усиливается по мере возрастания числа оцениваемых параметров и количества используемых измерений. С другой стороны, метод минимакса требует для своего осуществления значительно меньших сведений об ошибках исходных данных и обеспечивает гарантированную оценку точности получаемых результатов. Однако находимые в результате значения максимальных ошибок оценок параметров системы или их максимальных дисперсий часто оказываются сильно завышенными, так как их определение базируется на допущении о практически невероятном сочетании различных погрешностей исходных данных.

Эти результаты позволяют сделать несколько практических рекомендаций. Измерители наклонной дальности должны располагаться в углах треугольника, лежащего на поверхности Земли и близкого к равностороннему. Величины эти сторон должны быть выбраны такими, чтобы линии визирования, исходящие их точек стояния измерителей и направленные в среднюю точку мерного интервала траектории образовали попарно прямые углы. Для случаев, когда данные получены с ошибками и информация об этом неполна, эффективно использовать алгоритм вариационно-взвешенных квадратических приближений.