УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ КОЭФФИЦИЕНТНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Саланов М.А.
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Полынцева С.В.
Сибирский федеральный университет

Рассматривается задача идентификации двух неизвестных коэффициентов многомерного параболического уравнения с условиями переопределения, заданными на двух различных гиперплоскостях.

Задачи идентификации коэффициентов (коэффициентные обратные задачи) уравнений и систем уравнений в частных производных исследовались М.М. Лаврентьевым, Ю.Е. Аниконовым, А.И. Прилепко, В. М. Исаковым, В. Л. Камыниным, Н. Я. Безнощенко, Ю. Я. Беловым и другими авторами.

В данной работе, на основе условий переопределения, обратная задача приводится к прямой задаче для нагруженного уравнения. В предположении достаточно гладких входных данных, с помощью метода слабой аппроксимации доказывается однозначная разрешимость прямой задачи.

Решение исходной обратной задачи выписывается в явном виде через решение прямой задачи. На этой основе доказывается теорема существования и единственности классического решения обратной задачи в классе гладких ограниченных функций.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x,z)|0 \le t \le T, x \in E_{n,}\ z \in E_1\}$ рассматривается задача Коши

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}(t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} q_i(t)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \alpha_1(t,x)\alpha_2(t,x)u_{zz} +$$
$$+\alpha_1(t,x)\beta_1(t)u_z + \alpha_1(t,x)\beta_2(t)u + \alpha_1(t,x)f(t,x,z), \quad (1)$$
$$u(0,x,z) = u_0(x,z), \qquad (x,z) \in E_{n+1}. \quad (2)$$

Здесь функции $f(t,x,z)$, $u_0(x,z)$ заданы в $G_{[0,T]}$ и E_{n+1} соответственно, коэффициенты $q_i(t),\ i = \overline{1,n},$ $-$ непрерывные действительнозначные функции переменной t, $0 \le t \le T, T > 0, T = const.$ $E_n - n -$ мерное евклидово пространство, $n \ge 1, n \in Z$.

Считаем, что $q_{ij}(t) = q_{ji}(t), i,j = 1,\dots,n,$ и выполняется соотношение

$$0 < \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}(t)\,\xi_i\xi_j, t \in [0,T]$$

при любых значениях $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in E_n\backslash\{0\}$.

Неизвестными в задаче являются коэффициенты $\alpha_1(t,x), \alpha_2(t,x)$ и решение $u(t,x,z)$ задачи (1), (2).

Предположим, что выполняются условия переопределения:

$$u(t,x,a) = \varphi(t,x),\ (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad (3)$$
$$u(t,x,b) = \psi(t,x),\ (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \quad a \ne b,\ a,b = const, \quad (4)$$

где $\Pi_{[0,T]} = \{(t,x)|0 \le t \le T, x \in E_n\}$ и $\varphi(t,x), \psi(t,x) -$ заданные функции, удовлетворяющие условиям согласования:

$$\varphi(0,x) = u_0(x,a), \psi(0,x) = u_0(x,b), \quad x \epsilon E_n. \quad (5)$$

Ниже мы рассматриваем классические (достаточно гладкие) решения.

Под решением обратной задачи $(1)-(4)$ в полосе $G_{[0,t^*]}, 0 < t^* \le T$, понимается тройка функций $\alpha_1(t,x), \alpha_2(t,x)$, $u(t,x,z)$, которые удовлетворяют соотношениям $(1)-(4)$.

Приведем задачу $(1)-(4)$ к некоторой прямой вспомогательной задаче. Положив $z=a$ и $z=b$ в (1), получим систему алгебраических уравнений, из которой определяются неизвестные коэффициенты $\alpha_1(t,x)$, $\alpha_2(t,x)$. Они имеют вид

$$\alpha_1(t,x)=\frac{R_2u_{zz}(t,x,a)-R_1u_{zz}(t,x,b)}{u_{zz}(t,x,a)P_2-u_{zz}(t,x,b)P_1}; \tag{6}$$

$$\alpha_2(t,x)=\frac{P_2R_1-P_1R_2}{R_2u_{zz}(t,x,a)-R_1u_{zz}(t,x,b)}, \tag{7}$$

где

$$P_1(t,x)=\beta_1(t)u_z(t,x,a)+\beta_2(t)\varphi(t,x)+f(t,x,a),$$
$$P_2(t,x)=\beta_1(t)u_z(t,x,b)+\beta_2(t)\psi(t,x)+f(t,x,b),$$
$$R_1(t,x)=\varphi_t(t,x)-\sum_{i,j=1}^{n}q_{ij}(t)\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}q_i(t)\frac{\partial\varphi}{\partial x_i},$$
$$R_2(t,x)=\psi_t(t,x)-\sum_{i,j=1}^{n}q_{ij}(t)\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}-\sum_{i=1}^{n}q_i(t)\frac{\partial\psi}{\partial x_i}.$$

Подставив найденные коэффициенты $\alpha_1(t,x)$, $\alpha_2(t,x)$ в уравнение (1), получим прямую задачу

$$u_t(t,x,z)=\sum_{i,j=1}^{n}q_{ij}(t)\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}q_i(t)\frac{\partial u}{\partial x_i}+\frac{P_2R_1-P_1R_2}{u_{zz}(t,x,a)P_2-u_{zz}(t,x,b)P_1}u_{zz}+$$
$$+\frac{R_2u_{zz}(t,x,a)-R_1u_{zz}(t,x,b)}{u_{zz}(t,x,a)P_2-u_{zz}(t,x,b)P_1}\beta_1(t)u_z+$$
$$\frac{R_2u_{zz}(t,x,a)-R_1u_{zz}(t,x,b)}{u_{zz}(t,x,a)P_2-u_{zz}(t,x,b)P_1}\beta_2(t)u+$$
$$+\frac{R_2u_{zz}(t,x,a)-R_1u_{zz}(t,x,b)}{u_{zz}(t,x,a)P_2-u_{zz}(t,x,b)P_1}f(t,x,z)); \tag{8}$$

$$u(0,x,z)=u_0(x,z). \tag{9}$$

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие соотношения и удовлетворяют им

$$|D_x^\alpha R_l(t,x)|+|\beta_l(t)|+|D_x^\alpha\varphi(t,x)|+|D_x^\alpha\psi(t,x)|\le C, \tag{10}$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha u_0(x,z)\right|+\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}D_x^\alpha f(t,x,z)\right|\le C. \tag{11}$$

Здесь $|\alpha|\le 4$, $l=1,2$, $k=\overline{0,10-2|\alpha|}$, $|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$, $(t,x,z)\in G_{[0,T]}$, $C>1$, C *− постоянная*, $D_x^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\dots\partial x_n^{\alpha_n}}$.

Предположим, что в $\Pi_{[0,T]}$

$$|\psi_t(t,x)|+|\varphi_t(t,x)|+|R_{lt}(t,x)|+|\beta_l(t)|+|f_t(t,x,b)|+|f_t(t,x,a)|\le C, l=1,2, \tag{12}$$

$$A(0,x)=u_{0_{zz}}(x,a)R_2(0,x)-u_{0_{zz}}(x,b)R_1(0,x)\ge\delta>0, \tag{13}$$

$$B(0,x)=P_2(0,x)u_{0_{zz}}(x,a)-P_1(0,x)u_{0_{zz}}(x,b)\ge\delta>0, \tag{14}$$

$$P_2(0,x)R_1(0,x)-R_2(0,x)P_1(0,x)\ge\delta>0. \tag{15}$$

С помощью метода слабой аппроксимации, на основании достаточно гладких входных данных $(10)-(15)$, доказано существование решения $u(t,x,z)$ прямой задачи (8), (9) в классе $C_{t,x,z}^{1,2,2}\left(G_{[0,t^*]}\right)\cap C_{t,x,z}^{0,0,4}\left(G_{[0,t^*]}\right)$, где

$$C_{t,x,z}^{1,2,2}\left(G_{[0,t^*]}\right)=\{f(t,x,z)|\, f_t\in C\left(G_{[0,t^*]}\right), D_x^\beta\frac{\partial^k}{\partial z^k}f\in C\left(G_{[0,t^*]}\right), |\beta|\le 2, k=\overline{0,2}\},$$

$$C_{t,x,z}^{0,0,4}\left(G_{[0,t^*]}\right)=\{f(t,x,z)|\ \frac{\partial^k}{\partial z^k}f\in C\left(G_{[0,t^*]}\right),\ k=\overline{0,4}\}.$$

При этом, при $(t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$, справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} u(t,x,z)\right| \leq C, \quad k = \overline{0,4}, \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\beta u(t,x,z)\right| \leq C, \quad |\beta| \leq 2, \quad k = 0,1,2, \tag{17}$$

Докажем, что тройка функций $\alpha_1(t,x), \alpha_2(t,x), u(t,x,z)$, где $\alpha_1(t,x), \alpha_2(t,x)$ имеют вид (6), (7), является решением обратной задачи $(1) - (4)$. Поскольку $u(t,x,z)$ $-$ это решение прямой задачи (8), (9), то подставляя $\alpha_1(t,x), \alpha_2(t,x), u(t,x,z)$ в (1), получим верное тождество.

Согласно (10), (11), (16), (17) из $(6) - (8)$ получим, что тройка функций $\alpha_1(t,x), \alpha_2(t,x), u(t,x,z)$ принадлежит классу

$$Z(t^*) = \left\{\alpha_1(t,x), \alpha_2(t,x), u(t,x,z) \mid u \in C_{t,x,z}^{1,2,2}\left(G_{[0,t^*]}\right) \cap C_{t,x,z}^{0,0,4}\left(G_{[0,t^*]}\right);\right.$$
$$\left.\alpha_1(t,x), \alpha_2(t,x) \in C_{t,x}^{0,2}\left(\Pi_{[0,t^*]}\right)\right\}$$

и удовлетворяет неравенствам

$$\sum_{k=0}^{4}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} u(t,x,z)\right| \leq C; \ \sum_{k=0}^{2}\sum_{|\beta|\leq 2}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D_x^\beta u(t,x,z)\right| \leq C, (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}, \tag{18}$$

$$\sum_{|\beta|\leq 2}^{n}\left|D_x^\beta \alpha_1(t,x)\right| + \sum_{|\beta|\leq 2}\left|D_x^\beta \alpha_2(t,x)\right| \leq C, (t,x) \in \Pi_{[0,t^*]}. \tag{19}$$

Здесь

$$C_{t,x}^{0,2}\left(\Pi_{[0,t^*]}\right) = \left\{\alpha(t,x) \middle| D_x^\beta \alpha(t,x) \in C\left(\Pi_{[0,t^*]}\right), \ |\beta| \leq 2\right\}.$$

Доказано выполнение условий переопределения (3), (4).

Имеет место

Теорема. Пусть выполняются условия (5), $(10) - (15)$. Тогда существует единственное решение $\alpha_1(t,x), \alpha_2(t,x)$, $u(t,x,z)$ задачи $(1) - (4)$ в классе $Z(t^*)$, удовлетворяющее соотношениям (18), (19). Постоянная $t^*, 0 < t^* \leq T$, зависит от постоянных C, δ из соотношений $(10) - (15)$.