

## МОДИФИКАЦИЯ АЛГОРИТМА ДВУМЕРНОГО БПФ ПО АНАЛОГУ КУЛИ-ТЮКИ ДЛЯ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СИГНАЛА

Старовойтов А.В., Тутатчиков В.С., Киселёв О.И.

Научный руководитель – проф. Носков М.В.

*Сибирский федеральный университет*

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) имеет несколько важных приложений благодаря тому, что существуют эффективные алгоритмы его вычисления, например, ДПФ можно использовать для спектрального анализа многомерных сигналов (космоснимки).

В работе рассмотрены алгоритмы вычисления ДПФ, значительно отличающиеся по своей вычислительной сложности: вычисление двумерного ДПФ методом разбиения на столбцы и строки, вычисляемые при помощи быстрого преобразования Фурье (БПФ), а также двумерное БПФ по аналогу с алгоритмом Кули-Тьюки.

Рассмотрим сигнал  $f$ , который является двумерным периодическим сигналом с периодом  $2^s$  по первой и  $2^{s+\vartheta}$  по второй координате. Отсчёты задаются, как  $f_{k,t}$ , где  $k = 0: 2^s, t = 0: 2^{s+\vartheta}$ .

Дискретное преобразование Фурье для данного сигнала  $f$  задаётся формулой

$$F_{l,m} = \sum_{k=0}^{2^s-1} \sum_{t=0}^{2^{s+\vartheta}-1} f_{k,t} e^{\frac{2\pi i l k}{2^s}} e^{\frac{2\pi i m t}{2^{s+\vartheta}}}.$$

Двумерное ДПФ Фурье можно вычислить при помощи одномерных ДПФ. Для этого вычисляют  $F$  в следующем виде:

$$F_{l,m} = \sum_{k=0}^{2^s-1} \left[ \sum_{t=0}^{2^{s+\vartheta}-1} f_{k,t} e^{\frac{2\pi i m t}{2^{s+\vartheta}}} \right] e^{\frac{2\pi i l k}{2^s}}.$$

Суммы в квадратных скобках представляют собой одномерные вычисления ДПФ по строкам исходного сигнала  $f$ . Преобразуем данную формулу:

$$\begin{aligned} F_{l,m} &= \sum_{k=0}^{2^s-1} \left[ \sum_{t=0}^{2^{s+\vartheta}-1} f_{k,t} e^{\frac{2\pi i m t}{2^{s+\vartheta}}} \right] e^{\frac{2\pi i l k}{2^s}} = \\ &= \sum_{k=0}^{2^s-1} \left[ \sum_{t_1=0}^{2^{s+\vartheta}-1-1} f_{k,2t_1} e^{\frac{2\pi i m 2t_1}{2^{s+\vartheta}}} + \sum_{t_1=0}^{2^{s+\vartheta}-1-1} f_{k,2t_1-1} e^{\frac{2\pi i m (2t_1+1)}{2^{s+\vartheta}}} \right] e^{\frac{2\pi i l k}{2^s}}. \end{aligned}$$

Рассмотрим подробнее внутреннюю сумму в квадратных скобках:

$$\begin{aligned} &\sum_{t_1=0}^{2^{s+\vartheta}-1-1} f_{k,2t_1} e^{\frac{2\pi i m 2t_1}{2^{s+\vartheta}}} + \sum_{t_1=0}^{2^{s+\vartheta}-1-1} f_{k,2t_1-1} e^{\frac{2\pi i m (2t_1-1)}{2^{s+\vartheta}}} = \\ &= \sum_{t_1=0}^{2^{s+\vartheta}-1-1} f_{k,2t_1} e^{\frac{2\pi i m t_1}{2^{s+\vartheta-1}}} - \sum_{t_1=0}^{2^{s+\vartheta}-1-1} f_{k,(2t_1-1)} e^{\frac{2\pi i m t_1}{2^{s+\vartheta-1}}} e^{\frac{\pi i m}{2^{s+\vartheta-1}}} = F_{k,2t_1}^1 - e^{\frac{\pi i m}{2^{s+\vartheta-1}}} F_{k,2t_1-1}^2, \end{aligned}$$

где

$$F_{k,2t_1}^1 = \sum_{t_1=0}^{2^{s+\vartheta}-1-1} f_{k,2t_1} e^{\frac{2\pi i m t_1}{2^{s+\vartheta-1}}}, F_{k,2t_1-1}^2 = \sum_{t_1=0}^{2^{s+\vartheta}-1-1} f_{k,(2t_1-1)} e^{\frac{2\pi i m t_1}{2^{s+\vartheta-1}}}$$

$F_{k,2t_1}^1$  – двумерный сигнал размерности  $2^s:2^{s+\vartheta-1}$ . Последовательно применяя к нему описанную процедуру разделения второй координаты на четные и нечетные компоненты, получим комбинацию конечных сигналов  $F_{k,2t_\vartheta}^\vartheta$  размерности  $2^s:2^s$ , для которого уже описан алгоритм БПФ по аналогу алгоритма Кули-Тьюки.

Подсчитаем число операций. Описанная процедура занимает  $2^{\vartheta-1}\vartheta$  операций комплексных умножений и  $2^{\vartheta+1}\vartheta$  операций комплексных сложений. БПФ по аналогу алгоритма Кули-Тьюки над конечным сигналом  $F_{k,2t_\vartheta}^\vartheta$  требует  $3 \cdot 2^{2s-2}s$  операций комплексных умножений и  $2^{2s+1}s$  операций комплексных сложений. Тогда общее число операций для обработки исходного сигнала  $f_{k,t}$ , где  $k = 0:2^s, t = 0:2^{s+\vartheta}$  составляет:  $3 \cdot 2^{2s+\vartheta-3}(s + \vartheta)$  операций комплексных умножений и  $2^{2s+\vartheta+1}(s + \vartheta)$  операций комплексных сложений. В случае вычисления БПФ исходного сигнала разбиением на строки и столбцы потребуется  $2^{2s+\vartheta-1}(2s + \vartheta)$  операций комплексных умножений и  $2^{2s+\vartheta+1}(2s + \vartheta)$  операций комплексных сложений.

Для тестирования алгоритма была написана программа на языке программирования C++ с использованием библиотеки MPI.

Тестирование проводилось на персональном компьютере с характеристиками:

- Процессор: Intel Core 2 Duo CPU T8100 2.1 GHz;
- Оперативная память: 2 Гб;
- Операционная система: Windows XP Service Pack 3.

Время работы двумерного БПФ в секундах:

Высота	Ширина	Число процессоров	БПФ по строчкам и столбцам		БПФ по аналогу Кули-Тьюки	
			2 процессора	4 процессора	2 процессора	4 процессора
		16	3.123	0.153	8.300	0.495
1024	2048	1	1.105	1.081	0.666	0.645
		2	1.356	1.345	2.441	2.421
		4	0.986	1.123	2.121	1.903
		8	0.768	1.233	1.757	2.566
		16	11.322	1.101	11.900	71.360
1024	4096	1	2.414	2.392	1.413	1.410
		2	2.377	2.355	4.132	4.097
		4	1.686	2.556	3.111	7.130
		8	1.319	2.467	8.976	32.455
		16	-	4.414	-	51.223
1024	8192	1	6.057	5.970	3.312	3.848
		2	5.179	4.812	7.110	7.505
		4	3.671	4.677	6.500	13.001
		8	2.938	3.833	5.990	25.020
		16	-	7.600	-	-

**Вывод:** модифицированный алгоритм по аналогу Кули-Тьюки для прямоугольного сигнала требует меньшее число комплексных операций сложения и умножения.