УДК 514.115

ПРИНЦИП ИНВЕРСИИ ПРИ ГЕОМЕТИРЧЕСКИХ ПОСТРОЕНИЯХ ОДНИМ ЦИРКУЛЕМ

Лёмина С.С.,
Научный руководитель Арасланова М.Н.
Сибирский федеральный университет

Искусство построения геометрических фигур с помощью циркуля и линейки было высоко развито в Древней Греции. Линейкой пользовались ещё в Древнем Египте, но циркуль изобрели именно в Греции. Возможно, два этих инструмента потому и стали основными, что позволяли начертить две простейшие линии – прямую и окружность, а в математике решение задачи минимальными средствами всегда считалось признаком совершенства. Уже давно было замечено, что циркуль является более точным, более совершенным инструментом, чем линейка, что некоторые построения можно выполнить одним циркулем без употребления линейки, например, разделить окружность на шесть равных частей, построить точку, симметричную данной точке относительно данной прямой, и т.д. было обращено внимание на тот факт, что при резьбе на тонких металлических пластинках, при разметке делительных кругов астрономических инструментов пользуются, как правило, одним только циркулем. Последнее, вероятно, и послужило толчком к исследованию геометрических построений, выполняемых одним лишь только циркулем.

В 1979 году итальянский математик, профессор университета в Павии, Лоренцо Маскерони опубликовал большую работу «Геометрия циркуля», которая позже была переведена на французский и немецкий языки. В этой работе было доказано следующее предложение: «Все задачи на построение, разрешимые циркулем и линейкой, могут быть точно решены и одним только циркулем». Разумеется, циркулем нельзя провести прямую, поэтому Маскерони считал прямую построенной, если построены две её точки. Ее оригинально доказал в 1890 году А. Адлер, применив метод инверсии.

В 1928 году датский математик Гьельмслев нашёл в книжном магазине Копенгагена книгу Г. Мора под названием «Датский Евклид», изданную в 1672 году в Амстердаме. В первой части этой книги дано полное решение проблемы Маскерони. Таким образом, задолго до Маскерони было показано, что все геометрические построения, выполнимые с помощью циркуля и линейки, могут быть выполнены с помощью только циркуля. Раздел геометрии, изучающий геометрические построения одним циркулем, называют *геометрией циркуля*.

В 1833 году швейцарский геометр Якоб Штейнер опубликовал работу «Геометрические построения, производимые с помощью прямой линии и неподвижного круга», в которой наиболее полно исследовал построения одной линейкой. Основной результат этой работы можно сформулировать в виде предложения: каждая задача на построение, разрешимая циркулем и линейкой, может быть решена и одной линейкой, если в плоскости чертежа дана постоянная окружность и её центр. Таким образом, чтобы линейку сделать равносильной циркулю, достаточно однократное употребление циркуля.

Инверсией J относительно окружности ω называется отображение плоскости, переводящее произвольную точку M, отличную от O, в точку M', удовлетворяющую условиям:

1. точка M' принадлежит лучу OM;
2. $OM \cdot OM' = R^2$.

Точка O называется центром инверсии, R - радиусом инверсии, точка M' инверсной (обратной) точке M относительно точки O при радиусе R, а окружность ω - базисной окружностью инверсии. Фигура, образованная всеми точками, инверсными точкам данной фигуры, называется фигурой, инверсной данной.

Отметим простейшие свойства инверсии.

1. Если точка M инверсна точке M', то и точка M' инверсна точке M.

2. Центр инверсии не имеет образа.

3. Для всех точек плоскости, отличных от центра инверсии, инверсия является взаимно-однозначным соответствием.

4. Каждая точка базисной окружности инверсна самой себе.

5. Если данная точка лежит вне базисной окружности, то инверсная ей точка лежит внутри этой окружности, и наоборот.

6. Если одна из двух взаимно инверсных точек удаляется от центра инверсии, то другая приближается к нему, и наоборот.

7. При инверсии луч, исходящий из центра инверсии, преобразуется в себя.

8. При инверсии прямая, проходящая через центр инверсии, преобразуется в себя, а прямая, не проходящая через центр инверсии - в окружность, проходящую через него.

9. При инверсии окружность, проходящая через центр инверсии, преобразуется в прямую (причем эта прямая перпендикулярна к линии центров данной окружности и базисной окружности), а окружность, не проходящая через центр инверсии - в окружность, также не проходящую через него.

10. При инверсии плоскость, проходящая через центр инверсии (без центра инверсии), преобразуется в себя.

На основании этих свойств получаются способы построения взаимных в инверсии точек, которое может быть выполнено при помощи одного только циркуля.

Задача 1. Построить точку инверсную данной точке P относительно окружности инверсии ω.

1 *случай.* P – вне окружности.

Построение.

1. $\omega 1(P, OP)$
2. $\omega 1 \cap \omega = A, B$
3. $\omega 2(A, r)$
4. $\omega 3(B, r)$
5. $\omega 2 \cap \omega 3 = P'$
6. P' – искомая (рис. 1).

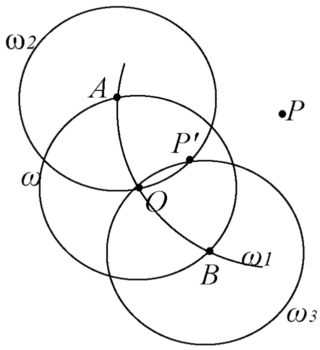

Рис.1

2 *случай.* P – внутри окружности.

Построение.

1. $Q'Q = 2OP$
2. $Q' = J\,\omega(Q)$
3. $OP' = 2OQ'$
4. P'- искомая (рис. 2).

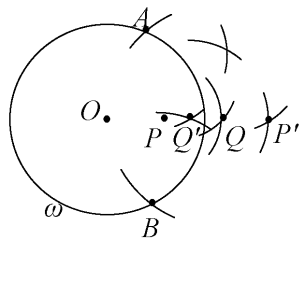

Рис. 2

3 *случай*. Точка P принадлежит окружности.

В этом случае точка P сама себе инверсна.

Для того, чтобы доказать основную теорему геометрии циркуля, необходимо показать разрешимость аксиом циркуля и линейки одним циркулем. Применение метода инверсии позволяет это сделать, рассмотрев решение 6 задач, что упрощает доказательство основной теоремы по сравнению с первым методом, который требует решения 9 задач.

Задача 2. Дана окружность, центр которой неизвестен. Построить ее центр.

Построение.

1. $O_1 \in \omega$
2. $\omega_1(O_1, r)$
3. $\omega_1 \cap \omega = A, B$
4. $\omega_2 (O_2, O_1O_2) = J\ \omega\ (AB)$
5. $\omega_2 \cap \omega_1 = D_1, D_2$
6. $\omega_3 (D_1, r)$
7. $\omega_4 (D_2, r)$
8. $\omega_3 \cap \omega_4 = O$
9. O – искомая (рис. 3).

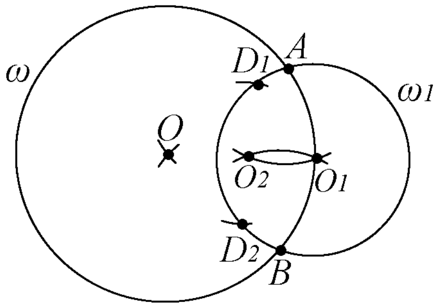

Рис. 3

Список литературы

1. Адлер А. Теория геометрических построений. М.: Учпедгиз, 1957. 230 с.

2. Болтянский В. Г., Бескин Н. М. и др. Общий принцип геометрических построений // ЭЭМ. М., 1963. Т. 4. Геометрия. 567 с.

3. Костовский А. Н. Геометрические построения одним циркулем. М.: Наука, 1987. 78 с.