УДК 336.77:510

МАТЕМАТИКА В СФЕРЕ ФИНАНСОВ И КРЕДИТА

Аджигильдиев И.В.,Молодцов А.Е.,
научный руководитель канд.физ.-мат.наук, доцент Терещенко Ю.А.
Сибирский Федеральный Университет

Введение

В последние годы в нашей стране значительные изменения произошли в сфере приложений математики. Социально – экономические причины перенесли интересы специалистов по прикладной математике, на новые области, которые практически не были известны в нашей стране до начала 90-х годов. Активное развитие банковской, страховой, инвестиционной деятельности поставило необходимость привлечения в эти области специалистов совершенно нового для нашей страны типа. Одной из новых для нашей страны областей оказалась финансовая математика.

Финансовая математика — раздел прикладной математики, имеющий дело с математическими задачами, связанными с финансовыми расчётами. В финансовой математике любой финансовый инструмент рассматривается с точки зрения генерируемого этим инструментом некоторого (возможно случайного) денежного потока.

Актуальность выбранной темы обусловлена широким применением методов математического расчета процентной ставки в сфере финансов и кредита на этапах разработки условий контрактов, при финансовом проектировании, при сравнении и выборе долгосрочных инвестиционных проектов, при расчетах в личном страховании и др. Знание методов математических операций с процентной ставкой используются в деятельности финансистов, бухгалтеров, экономистов, банкиров.

В данной работе мы рассмотрим нахождение простых и сложных процентов посредством применения различных известных математических приемов и формул, таких, как аппроксимация, вытекающие из неё приёмы – ряды Тейлора (ряды Маклорена), применяющиеся при аппроксимации функции многочленами. Немаловажным также является нахождения процентов с учетом темпа инфляции, что можно осуществить, воспользовавшись формулой Фишера, отражающей номинальную и реальную доходность.

Элементы финансовой математики
Эффективная процентная ставка. Номинальная и реальная доходность

1.Понятия простых и сложных процентов

С экономической точки зрения метод сложных процентов является более обоснованным, так как он выражает возможность непрерывного реинвестирования (повторного вложения) денежных средств. Тем не менее, для краткосрочных (продолжительностью менее года) финансовых операций чаще всего используется метод простых процентов.

Простые проценты – форма расчета дохода на процент, основанная на арифметической прогрессии. С помощью простых процентов рассчитывается доход на вклад при сроке его хранения меньше года.

Сложные проценты – понятие, которое описывает особый вид начисления процентов в банковском депозите, при котором, по истечении каждого периода, начисленные проценты становятся основной суммой. Вследствие этого, в следующем периоде, проценты начисляются на бо́льшую сумму, чем в предыдущем, за счет чего вклад растет очень быстро.

Визуализируем эти понятия посредством формул:

$C_1 = C_0 \cdot (1+i)$, где i –процентная ставка

$C_2 = C_1 \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i) \cdot (1+i) = C_0 \cdot (1+i)^2$

$C_n = C_0 \cdot (1+i)^n$, $C(t) = C_0 \cdot (1+i)^t$

Простые проценты	Сложные проценты
$1 + t \cdot i$	$(1+i)^t$

2.Аппроксимации

Аппроксимация – научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в том или ином смысле близкими к исходным, но более простыми, или приближенное решение сложной функции с помощью более простых, что резко ускоряет и упрощает решение задач. Аппроксимация заключается в том, что используя имеющуюся информацию по *f(x)* можно рассмотреть другую функцию *g(x)* близкую в некотором смысле к *f(x)*, позволяющую выполнить над ней соответствующие операции и получить оценку погрешность такой замены (*g(x)*- аппроксимирующая функция).

Аппроксимация для малых годовой процентной ставки и срока вклада выглядит следующим образом: $(1+i)^n \approx 1 + n \cdot i$; $(1+i)^n \approx 1 + n \cdot i + \frac{n \times (n-1) \cdot i^2}{2}$.

Пример для *n=5*

годовая процентная ставка (*i*)	$(1+i)^n$	$1 + n \cdot i$	$1 + n \cdot i + \frac{n \times (n-1) \cdot i^2}{2}$
1	1,051	1,050	1,051
2	1,104	1,100	1,104
3	1,159	1,150	1,159
4	1,217	1,200	1,216
5	1,276	1,250	1,275
6	1,338	1,300	1,336
7	1,403	1,350	1,399
8	1,469	1,400	1,464
9	1,539	1,450	1,531
10	1,611	1,500	1,600

Однако для более высоких степеней *n* и процентных ставок *i* линеаризация (один из методов приближённого представления замкнутых нелинейных систем) недопустима.

3.Ряд Тейлора

Ряд Тейлора — разложение функции в бесконечную сумму степенных функций. Ряды Тейлора применяются при аппроксимации функции многочленами. В частности, линеаризация уравнений происходит путём разложения в ряд Тейлора и отсечения всех членов выше первого порядка.

Пусть функция *f(x),* бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки *a*.

Формальный ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, называется рядом Тейлора функции *f(x)* в точке *a*.

Ряд Тейлора – степенной ряд вида

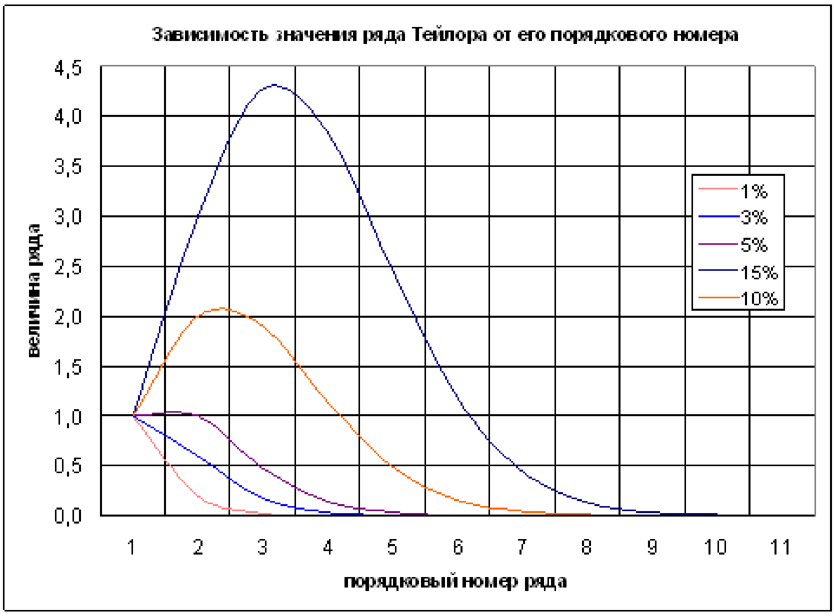
$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

В случае, если *a=0*, этот ряд называется **рядом Маклорена** и принимает вид:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

На рисунке приведены значения ряда Тейлора для n=20 при различных процентных ставках.

$$(1+i)^n=\sum_{x\to 0}^{\infty}\frac{i^n\cdot((1+i))^{\prime n}}{k!}=1+i\cdot n+\frac{n\cdot(n-1)\cdot i^2}{2}+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot i^3}{6}+\ldots\ldots$$



Данный пример показывает, что на больших временных интервалах нелинейностью пренебрегать нельзя. Поэтому многие приближения, построенные на линейных приближениях, корректны только на ограниченном временном интервале.

4.Годовая эффективная процентная ставка. Интенсивность процентов

Годовая эффективная процентная ставка(i_γ) вычисляется по формуле:

$$(1+\frac{i_\gamma}{m})^m=1+i\,;\; i_\gamma=m\cdot((1+i)^{1/m}-1)$$

Например, пусть годовая процентная ставка равна 100%. Тогда сумма в размере 1, размещенная под данную процентную ставку будет равна 2 в конце года. В случае если в середине года можно реинвестировать (повторно или дополнительно инвестировать) сумму с начисленными процентами получим 1,5·1,5=2,25. Поэтому для того, чтобы в этом случае получить в конце года сумму равную двум, годовая процентная ставка должна быть равна $2\cdot(\sqrt{2}-1)=0{,}82$, что составляет 82%.

Вычисление **интенсивности процентов** можно осуществлять посредством второго замечательного придела:

$\lim\limits_{m\to\infty}\left(1+\frac{\delta}{m}\right)^m=e^\delta$, где $e^\delta=(1+i)$, $\delta=\ln(1+i)$ - интенсивность процентов, сила роста.

годовая процентная ставка (i)	эффективная процентная ставка			
	m=2	m=6	m=12	δ (m=?)
1	0,998	0,996	0,995	0,995
2	1,990	1,984	1,982	1,980
3	2,978	2,963	2,960	2,956
4	3,961	3,935	3,928	3,922
5	4,939	4,899	4,889	4,879
6	5,913	5,855	5,841	5,827
7	6,882	6,804	6,785	6,766
8	7,846	7,746	7,721	7,696
9	8,806	8,680	8,649	8,618
10	9,762	9,607	9,569	9,531

5.Номинальная и реальная доходность

Для расчета используют уравнение Фишера— уравнение, описывающее связь между темпом инфляции, номинальной и реальной ставками процента:

$i_{xx} = i_{yy} + \inf l$,где i_{xx} - номинальная ставка процента, i_{yy} - реальная ставка процента, а $\inf l$ - темп инфляции – для значений, которые меньше 10%,

либо более точная: $1 + i_{xx} = \left(1 + i_{yy}\right) \cdot (1 + \inf l) = 1 + i_{yy} + \inf l + i_{yy} \cdot \inf l$

Пример решения задачи на основе изученного материала

Применив ряд Тейлора, привести значения сложных процентоввклада, полученных в результате депозитной операции. Используя формулу Фишера, скорректировать процентную ставку(i_{yy})простых и сложных процентов на уровне инфляции. Числовые значения: срок вклада(n) = 5; процентная ставка(i) = 13%; темп инфляции($\inf l$) в единицу срока вклада = 8,9%.

Решение:

1) Значения ряда Тейлора

$$\left(1+i\right)^n = 1 + \frac{0,13 \cdot 5}{1!} + \frac{5(5-1)0,13^2}{2!} + \frac{5(5-1)(5-2)0,13^3}{3!} + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)0,13^4}{4!} +$$

$$\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)0,13^5}{5!} = 1 + \frac{0,65}{1} + \frac{0,338}{2} + \frac{0,13182}{6} + \frac{0,3427320}{12} + \frac{0,4455515}{20}$$

2) Вычисления простых и сложных процентов

$$1 + n \cdot i = 1 + 5 \cdot 0,13 = 1,65$$

$$\left(1+i\right)^n = \left(1+0,13\right)^5 = 1,842435$$

3) Нахождение реальной процентной ставки

для простых: $i_{yy} = i_{xx} - n \cdot \inf l = 1,65 - 5 \cdot 0,089 = 1,205$

для сложных: $i_{yy} = 1,8424351 - 5 \cdot 0,089 = 1,3974351$

Заключение

Таким образом, методы финансово-математических расчетов позволяют определять проценты, процентные деньги и процентные ставки, данные при начислении простых и сложных процентов, наращение средств по простой и сложной ставке процентов, данные для выполнения стоимостной оценки потоков финансовых платежей, данные для планирования погашения задолженностей, кредитов и ссуд.

Методы математического расчета процентной ставки очень важны в сфере финансов и кредита и имеют широкое применение, как в экономической, так и социальной сферах современной жизни. И всё это благодаря прогрессивному развитию приложений математики на данном этапе современной рыночной экономики.