УДК 005.6:519.2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА И ТЕОРИЯ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ОБЛАСТИ УПРАВЛЕНИЯ КАЧЕСТВОМ

Янсон В.Д.,
научный руководитель канд.физ.-мат. наук, доцент Терещенко Ю.А.
Сибирский федеральный университет

Одна из наиболее важных прикладных областей принятия решений – это обеспечение надлежащего качества продукции, основанное на применении статистического моделирования. Управление качеством - прежде всего применение современных методов принятия решений на основе статистического моделирования. По словам Каору Исикава, президента промышленного института Мусаси, заслуженного профессора Токийского университета, методы статистики - именно то средство, которое необходимо изучить, чтобы внедрить управление качеством. Овладение основами статистического контроля качества продукции - неотъемлемая часть образования менеджера и инженера, экономического и тем более эконометрического образования.

Теория вероятностей и математическая статистика на своей основе с помощью математического моделирования позволяет проводить статистический контроль качества продукции – выборочный контроль на научной основе. Для проведения выборочного контроля необходимо сформировать выборку, выбрать план контроля. Анализ и синтез планов также проводят при использовании математических моделей.

Основные подходы статистического контроля

При статистическом контроле решение о генеральной совокупности, например, о партии продукции, - принимается по выборке, состоящей из некоторого количества единиц (единиц продукции). Наиболее распространенными являются две вероятностные модели:

- биномиальная;
- гипергеометрическая.

В биноминальной вероятностной модели используется центральная предельная теорема теории вероятностей. В этой модели предполагается, что результаты контроля n единиц можно рассматривать как совокупность n независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, X_2,....,X_n$, где $X_i = 1$, если i-ое изделие дефектно, и $X_i = 0$, если это не так.

Гипергеометрическое распределение соответствует случайному отбору единиц в выборку.

Пусть среди N единиц, составляющих генеральную совокупность, имеется D дефектных. Случайность отбора означает, что каждая единица имеет одинаковые шансы попасть в выборку. Тогда $P(Y = k)$ – гипергеометрическое распределение:

$$P(Y = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{D-k}}{C_N^n},$$

где C_n^k – число, сочетаний из n элементов по k
$1/ C_n^k$ - вероятность того, что будет отобрано заранее заданное сочетание.

При реальном контроле лучше формировать выборку, исходя из гипергеометрической модели. Алгоритмы формирования выборки встраивают в современные программные продукты по статистическому контролю.

Планы статистического контроля

Существует алгоритм, который, с точки зрения статистики, представляет собой правила действий, на входе при этом - генеральная совокупность, а на выходе - одно из двух решений. Если же рассматривать эту модель как план статистического контроля, то генеральную совокупность представляют как партия продукции, решения, к которым нужно прийти – это «принять партию», либо «забраковать партию». Существует несколько планов статистического контроля:

— одноступенчатый (n;c);
— частные одноступенчатые (n;0) или (n;1);
— двухступенчатый план (n;a;b) + (m; c).

Оперативная характеристика плана статистического контроля

Оперативная характеристика плана статистического контроля определяется с помощью функции $f(p)$,
где p – это вероятность того, что конкретная единица дефектна. Эта вероятность называется входным уровнем дефектности.

Если дефектные единицы отсутствуют, $p = 0$, то партия всегда принимается, т.е. $f(0) = 1$. Если все единицы дефектные, $p = 1$, то партия наверняка бракуется, $f(1) = 0$. Между этими крайними значениями p функция $f(p)$ монотонно убывает. Для плана (n;0) оперативная характеристика имеет вид

$$f(p) = P(X=0) = (1—p)^n. \qquad (1)$$

Пример. Дан план (20, 0, 2) + (40, 0). Найти его оперативную характеристику.

1) Найдем вероятность того, что партия будет принята по результатам контроля первой партии. Согласно формуле (1) имеем:

$$f_1(p) = P(X=0) = (1—p)^{20}.$$

2) Вероятность того, что понадобится контроль второй выборки, равна

$$P(X=1) = 20(1—p)^{19}.$$

При этом вероятность того, что по результатам её контроля партия будет принята, равна

$$f_2(p) = P(X=0) = (1—p)^{40}.$$

3) Вероятность того, что при контроле первой выборки обнаружится ровно одна дефектная единица, а затем при контроле второй — ни одной, равна

$$f_3(p) = P(X=1)\, f_2(p) = 20(1—p)^{19}(1—p)^{40} = 20(1—p)^{59}.$$

4) Следовательно, вероятность принятия партии с первой или со второй попытки равна

$$f(p) = f_1(p) + f_3(p) = (1—p)^{20} + 20(1—p)^{59}.$$

Предел среднего выходного уровня дефектности

С помощью формулы полной вероятности можно рассчитать средний выходной уровень дефектности. При среднем входном уровне дефектности p и применении контроля с разбраковкой с вероятностью $f(p)$ партия принимается и с вероятностью $(1-f(p))$ бракуется и подвергается сплошному контролю, в результате чего к потребителю поступают только годные изделия. Поэтому, средний выходной уровень дефектности

$$f_1(p) = p * f(p) + 0\big(1 - f(p)\big) = p * f(p). \qquad (2)$$

Средний выходной уровень дефектности $f_1(p)$ равен 0 при p=0 и p=1, положителен на интервале (0;1), а потому достигает на нем максимума, который в теории статистического контроля называется пределом среднего выходного уровня дефектности (ПСВУД).

Асимптотическая теория одноступенчатых планов статистического контроля

Рассмотрим одноступенчатый план контроля (n, c). Тогда оперативная характеристика этого плана имеет вид

$$f(p) = \sum_{1\le k\le c} P(X=k) = \sum_{1\le k\le c} C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Пусть $n \to \infty$. Тогда по Закону Больших Чисел теории вероятностей (по теореме Бернулли)

$$\frac{X}{n} \to p.$$

Найдем для оперативной характеристики приближение с помощью теоремы Муавра-Лапласа:

$$f(p) = P(X \le c) = P\left(\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le \frac{c-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

Воспользовавшись равномерной сходимостью в этой теореме, можно записать, что

$$\lim_{n\to\infty} f(p) = \Phi\left(\frac{c-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

где *Ф (x)* - функция стандартного нормального распределения с математическим ожиданием 0 и дисперсией 1.

Последняя формула позволяет без труда написать асимптотические выражения для приемочного и браковочного уровней дефектности. Действительно, согласно определениям этих понятий

$$\Phi\left(\frac{c-np_{пр}}{\sqrt{np_{пр}(1-p_{пр})}}\right) = 1-\alpha, \Phi\left(\frac{c-np_{бр}}{\sqrt{np_{бр}(1-p_{бр})}}\right) = \beta, \tag{3}$$

откуда с помощью элементарных преобразований получаем, что

$$p_{пр} = \frac{c}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{c}{n}\left(1-\frac{c}{n}\right)}\,\Phi^{-1}(1-\alpha), p_{бр} = \frac{c}{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{c}{n}\left(1-\frac{c}{n}\right)}\,\Phi^{-1}(\beta) \tag{4}$$

Поскольку при практическом применении статистического приемочного контроля принимают $\alpha = 0{,}05$, $\beta = 0{,}10$, то

$$\Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}64 \text{ и } \Phi^{-1}(0{,}10) = -1{,}28.$$

Итак, итоговые формулы для приемочного и браковочного уровней дефектности имеют вид.

$$p_{пр} = \frac{c}{n} - \frac{1{,}64}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{c}{n}\left(1-\frac{c}{n}\right)}, \qquad p_{бр} = \frac{c}{n} + \frac{1{,}28}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{c}{n}\left(1-\frac{c}{n}\right)}.$$

Основной парадокс теории статистического приемочного контроля

Пусть необходимый объем выборки, определяемый для какого-либо плана контроля по заданному браковочному уровню дефектности

$$p_{бр} \ge 2{,}30 / p_{бр}.$$

Таким образом, если достигнут достаточно высокий уровень качества, такой, что потребителю может попасть не более *1* дефектной единицы продукции из *10000*, т.е.

$$p_{бр} = 0{,}0001,$$

то объем контроля должен быть не меньше $n = 23000$. Если же качество повысится в *100* раз, т.е. потребителю сможет попасть не более *1* дефектной единицы продукции из *1000000*, то объем контроля и затраты на него возрастут также в *100* раз, и минимально необходимый объем контроля составит *2,3 миллиона* единиц продукции. Поскольку объем партий большинства видов продукции существенно меньше этого числа, то проведенные выше расчеты говорят о необходимости перехода на сплошной контроль.

Если качество выпускаемой продукции не очень хорошее, то целесообразно проводить статистический контроль, если же качество возрастает, то объем контроля и затраты на него увеличиваются, вплоть до перехода на сплошной контроль. Если это возможно, то есть контроль не является разрушающим.

Применение статистических методов управления качеством на предприятиях

В 1924 г. в «Bell Telephone Laboratories» была создана группа под руководством Р.Л. Джонса, заложившая основы статистического управления качеством. Это были разработки контрольных карт, выполненные В. Шухартом, первые понятия и таблицы выборочного контроля качества, разработанные Г. Доджем и Г. Ромингом, ставшие началом статистических методов управления качеством, которые впоследствии благодаря Э. Демингу получили очень широкое распространение в Японии.

С развитием популярности этих подходов более сложной стала мотивация труда. Теперь учитывалась точность настроенности процесса, анализ тех или иных контрольных карт, карт регулирования и контроля. К профессиональному обучению добавилось обучение статистическим методам анализа, регулирования и контроля. Стали более сложными и отношения поставщик — потребитель. В них большую роль начали играть стандартные таблицы и статистический приемочный контроль.

Заключение

Внедрение математических моделей и статистических методов принятия решений в области управления качеством действительно является весьма эффективным. С помощью теорем и правил теории вероятностей и математической статистики можно прийти к результатам, которые повлияют на повышение уровня качества продукции.

Статистический контроль качества продукции, осуществляемый поставщиком (выходной контроль), решает две основные задачи: обеспечение интересов потребителя и обнаружение разладок собственных технологических процессов (по результатам контроля последовательности партий).

Список литературы

1. Статистические методы повышения качества. Перевод с японского. / Под ред. Х. Кумэ. - М.: Финансы и статистика, 1990.- 301 с.
2. Гнеденко Б.В. Математика и контроль качества продукции. - М.: Знание, 1978. - 64 с.
3. Ю.И. Ребрин. Управление качеством. // Учебное пособие. Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004. С. 112
4. Орлов А.И. Теория принятия решений. Учебное пособие. – М.: Издательство «Март», 2004.