УДК 519.6

ЗАДАЧА ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ И ЕЕ КОМПЬЮТЕРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ

Осипов М.В.
Научный руководитель канд. физ-мат. наук Осипов В.В.
Сибирский федеральный университет

Для понимания сущности решаемой задачи рассмотрим практический пример. Допустим, что в результате проведения эксперимента по исследованию зависимости теплоемкости вещества от температуры получены данные:

T	300	500	600
C	53	78	100

Полагая, что теплоемкость является непрерывной функцией от температуры, требуется определить, пользуясь экспериментальными данными, значения теплоемкости при температуре 450 *K*.

Другими словами, требуется определить значение таблично представленной непрерывной функции в тех точках внутри интервала, где она не задана. Эта задача называется *интерполированием.* Если требуется определить значение таблично заданной функции за пределами интервала, то такая задача является задачей *экстрополирования.* Более общей задачей является задача аппроксимации функций, которая заключается в приближенной замене функции *f(x)*, некоторой функцией $\varphi(x)$, так чтобы отклонение функции $\varphi(x)$ от *f(x)* в заданной области было бы наименьшим по некоторому критерию. В данном исследовании речь пойдет о первой задаче.

Требуется построить *интерполяционную* функцию $\varphi(x)$, которая приближенно заменяет исходную таблично заданную функцию $y = f(x)$и проходит через заданные точки (узлы интерполяции), т.е. $\varphi_i(x_i) = y_i$. Если удалось построить интерполяционную функцию $\varphi(x)$, то с ее помощью можно определить значение исходной функции $f(x)$в любой точке.

Решение задачи интерполяции требует: определиться с выбором интерполяционной функции $\varphi(x)$; выбрать критерий оценки погрешности интерполяции $R(x)$; выбрать узлы интерполяции для обеспечения наибольшей точности восстановления исходной функции $f(x)$; определить (разработать) алгоритм нахождения приближенной функции с заданной точностью.

Заметим, что поставленная задача интерполирования допускает множество решений, т.к. через заданные точки можно провести множество функций разной сложности.

В качестве интерполяционных функций $\varphi(x)$могут быть использованы:

– линейные комбинации функций $1, x, x^2, \ldots x^n$ (многочлены степени *n*);

–*cosn x, sin nx* (ряды Фурье);

– $e^{-\alpha x}$ (в задачах накопления и распада)

Наибольшее применение в качестве интерполяционной функции получил полином вида $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$ (1)

Достоинством представления (1) через усеченный ряд Тейлора является возможность оценить погрешность этого усечения.

Если использовать (1) в качестве интерполяционного многочлена, то необходимо определить $(n+1)$коэффициент $a_0, a_1, \ldots a_n$. Для этого используя табличные данные, получаем систему

$$\begin{cases} a_0 + & a_1x_0 + & a_2x_0^2 + \ldots + & a_nx_0^n = & y_0 \\ a_0 + & a_1x_1 + & a_2x_1^2 + \ldots + & a_nx_1^n = & y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_0 + & a_1x_n + & a_2x_n^2 + \ldots & a_nx_n^n = & y_{n1} \end{cases} \quad (2)$$

Естественно возникает вопрос о существовании и единственности решения системы (2). Определителем системы (2) является определитель Вандермонда

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix} \neq 0,$$

который отличен от нуля, так как узлы x_i – различны. Следовательно, система (2)по теореме Кронекера - Капелли имеет единственное решение при любых правых частях y_i т.е. коэффициенты интерполяционного многочлена $\varphi(x)$находятся однозначно.

При линейной интерполяции для i-ого интервала можно составить уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$y = a_i x + b_i, \quad x_{i-1} \le x \le x_i$, где

$$a_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, \quad b_i = y_{i-1} - a_i x_{i-1}$$

Квадратичная интерполяция в качестве интерполяционного многочлена на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ принимает многочлен второго порядка $y = a_i x^2 + b_i x + c_i, \quad x_{i-1} \le x \le x_{i+1}$

В докладе приводятся примеры линейной и квадратичной интерполяции для заданных таблиц значения функции

Обобщением приведенных выше подходов являются интерполяционные многочлены Лагранжа первой степени $(n=1)$ $L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f_1$

второй степени

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f_2 \quad (3)$$

и в общем случае

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} P_{ni}(x) f_i, \quad (4)$$

где

$$P_{ni}(x) = \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)} \quad (5) \quad i = 0,1\ldots n$$

Интерполяционный многочлен (4) называется интерполяционным многочленом Лагранжа, а функции (5) – лагранжевыми коэффициентами.

Из (4) и (5) следует, что в задачах интерполирования многих функций в одной точке x при одинаковых узлах интерполяции $x_0, x_1, \ldots x_n$ лагранжевые коэффициенты одинаковы и поэтому могут быть вычислены один раз.

Компьютерное построение полиномов Лагранжа, определенных (4),(5) требует разработки программы, структурно представляющей вложенные циклы: внешний цикл, определяющий ввод $x_1, x_2, \ldots x_n$ для вычисления во вложенном цикле лагранжевых коэффициентов и внешний цикл для вычисления произведения в $L_n(x)$.

При интерполировании по формулам Лагранжа естественно возникают вопросы: оценки погрешности и проблема сходимости интерполяционного процесса.

Если для функции $y = f(x)$ построен интерполяционный полином Лагранжа $L_n(x)$, принимающий в точках $x_0, x_1, ..x_n$, заданные значения $y_0 = f(x_0), \ldots, y_n = f(x_n)$. то возникает вопрос, насколько близко построенный полином приближается к функции $f(x)$в других точках, т.е. как велик остаточный член $R_n(x) = f(x) - L(x)$.

Предположим, что при $x \in [a,b]$, содержащим все узлы интерполирования, функция $f(x)$имеет все производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n+1)}(x)$до $(n+1)$-го порядка включительно.

Можно доказать, что если известна верхняя граница

$$M_{n+1} = \max_{x \in [a,b]} \left| f^{n+1}(x) \right|,$$

получим оценку для абсолютной погрешности интерполяционной формулы Лагранжа

$$\left| R_n(x) \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} L(x) \right|, x \in [a,b].$$

На практике считают, что эмпирические результаты более простой функцией (линейной), дают погрешность в различных узловых точках, лежащую в пределах от 5 до 35 %.

Более сложная формула квадратичной интерполяции обеспечивает погрешность не более 5 %.

Обсуждая вопрос: будет ли стремиться к нулю погрешность интерполирования $f(x) \; - \; \varphi(x)$, если число узлов *n* неограниченно увеличивать, надо иметь в виду:

1. Свойства сходимости или расходимости интерполяционного процесса зависят как от выбора последовательности сеток, так и от гладкости функции $f(x)$.
2. Известны примеры несложных функций, для которых интерполяционный процесс расходится.

Так последовательность интерполяционных многочленов, построенных для непрерывной функции $f(x) = |x|$ по равноотстоящим узлам на отрезке $[-1, \; 1]$, не сходится к функции $|x|$ ни в одной точке отрезка $[-1, 1]$, кроме точек -1,0, 1.

При интерполировании с равностоящими узлами $x_{i-1} - x_i = h, \quad i = 0,1,2,3...$ вводится понятие конечной разности как разность между значениями функции в соседних узлах интерполяции и используются **первая интерполяционная формула Ньютона.**

$$P_n(x) = y_0 \Delta y + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)(q-2)...(q-n+1)}{n!} \Delta^n y_0.$$

, где $q = \dfrac{x - x_0}{h}$

для интерполирования функции $y = f(x)$ в окрестности начального значения $x = x_0$, где q мало по абсолютной величине и **вторая** интерполяционная формула Ньютона, удобная для интерполирования вблизи конца таблицы:

$$P_n(x) = y_n + q\frac{\Delta y_{n-1}}{1!} + q(q+1)\frac{\Delta^2 y_{n-1}}{2!} + q(q+1)(q+2)\frac{\Delta^3 y_{n-3}}{3!} + \ldots q(q+1)\ldots(q+n-1)\frac{\Delta^n y_0}{n!},$$

$$q = \frac{x - x_n}{h}$$

Остаточный член первой интерполяционной **формулы Ньютона:**

$$\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}q(q-1)\ldots(q-n), \quad q = \frac{x - x_0}{h}$$

где ξ — некоторое промежуточное значение между узлами интерполирования $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и рассматриваемой точкой x .

Остаточный член второй интерполяционной формулы Ньютона:

$$\frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}q(q+1)\ldots(q+n), \quad q = \frac{x - x_n}{n}$$

где ξ — некоторое промежуточное значение между узлами интерполирования и рассматриваемой точкой.

Результаты и выводы:

Выявлено:

• построение приближенной функции по экспериментальным данным является актуальной практической задачей.

Принято к сведению на основе изучения теории:

•существует один и только один интерполяционный полином при заданном наборе узлов интерполяции (Формулы Лагранжа, Ньютона порождают один и тот же полином).

• Порядок интерполяционного полинома
$\varphi(x)=a_0+a_1x+a_1x^2+\ldots a_nx^n$ определяется количеством заданных узлов интерполяции (при «*n*» узлах, порядок $\varphi(x)$ равен (n-1))

•Интерполяционный многочлен $L_n(x)$ в форме Лагранжа содержит значения $f(x_i)$ в явном виде. Это удобно, когда необходимо построить интерполяционный многочлен на тех же узлах, но для другой функции – $g(x)$.Тогда значения $f(x_i)$ достаточно заменить на $g(x_i)$. Многочлен $L_n(x)$ в форме Ньютона содержит $f(x_i)$ неявно (через разделенные разности). Однако, он удобен, когда для этой же функции $f(x)$ необходимо увеличить порядок n. Тогда к исходному многочлену достаточно добавить несколько членов стандартного вида.

•Если максимальные разности практически постоянны, то результат интерполирования обыкновенно имеет столько верных десятичных знаков, сколько их есть в табличных данных, и поэтому оценка погрешности не обязательна. При пользовании интерполяционной формулой Лагранжа нет возможности следить за ходом конечных разностей, и поэтому следует, если это возможно, оценивать остаточный член.

• Повышение точности интерполяции целесообразно проводить за счет специального выбора узлов x_i интерполяции (а не за счет повышения порядка полинома!)

Разработан алгоритм интерполирования и реализован для ряда функций.

Определено направление дальнейших исследований: приближение функций тригонометрическими полиномами.