

О НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ СТАРОРУССКОЙ МЕРЫ ДЛИНЫ «САЖЕНЬ»

Будникова А.Г., Куликова Ю.С.

Научный руководитель канд. пед. наук Попова Е.А.

Сибирский федеральный университет

Косая сажень в плечах
Русская народная пословица

Сажень – старорусская мера длины. В «Этимологическом словаре русского языка» М. Фасмера находим, что «сажень» была записана надпись на камне в Тмутороканске, 1068 г., Ипатьевская летопись. Слово «сажень» происходит от слова «сягать», т.е. доставать до чего-либо. Сажени бывают разные. Все разного роста. Неужели у них у всех одинаковая сажень? Случайным образом было отобрано 50 ($n=50$ – большая выборка) молодых людей мужского пола в возрасте от 18 до 27 лет для определения современных величин различных видов сажени: косой (казенной); великой косой; мерной (маховой), простой сажени.

Сделаем предположение, что полученная выборка по каждой из выделенных сажени, имеет нормальное распределение. Нормальное распределение (распределение Гаусса) непрерывной случайной величины занимает центральное место в теории вероятностей.

Косая сажень (казенная) - расстояние от пальцев левой ноги до конца пальцев поднятой правой руки (рис. 1), принято считать 216 см (генеральная средняя). По сгруппированным данным построена гистограмма частот (рис. 2).

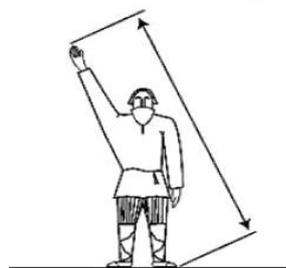


Рис 1. Косая сажень.

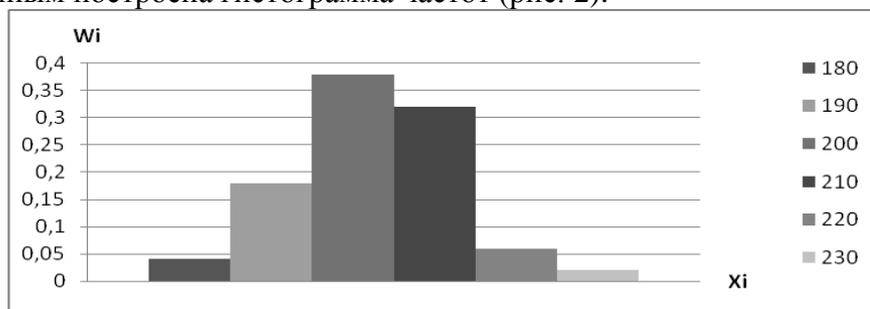


Рис 2. Гистограмма частот. Косая сажень (казенная).

Находим выборочное среднее: $\bar{x}_B = 202,4$ (см). $D_B = \sum_{i=1}^k (\tilde{x}_i - \bar{x}_B)^2 \cdot w_i = 102,24$ – выборочная дисперсия, тогда выборочное стандартное отклонение: $\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{\sum_{i=1}^k (\tilde{x}_i - \bar{x}_B)^2 \cdot w_i} = 10,11$ (см). Далее воспользуемся критерием согласия Пирсона. Вычислим выравнивающие частоты, согласно формуле:

$$n_i = \frac{n \cdot h}{\sigma_B} \cdot \phi(u_i) \quad (1)$$

где n – объем выборки, h – длина частичного интервала (разность между соседними вариантами), σ_B – выборочное среднее квадратическое отклонение, $\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}$ –

функция Гаусса, $u_i = \frac{x_i - \bar{x}_B}{\sigma_B}$, \bar{x}_B – выборочное среднее.

Построим эмпирическую и теоретическую кривые по данному распределению частоты (рис. 3).

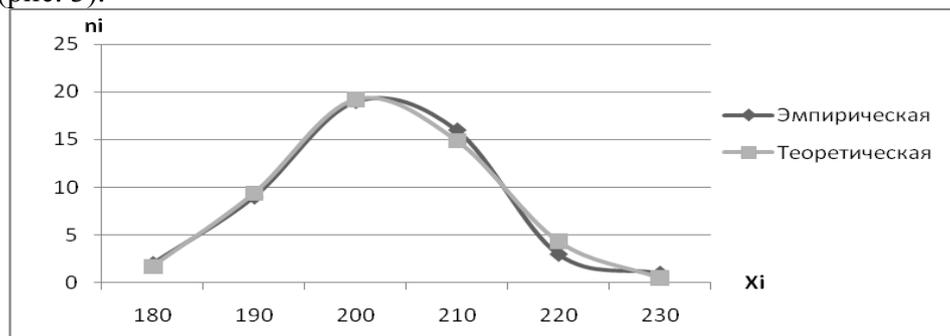


Рисунок 3. – Эмпирическая и теоретическая кривые косой сажени (казенной).

В качестве критерия проверки гипотезы о нормальном распределении принимается случайная величина $\chi^2_{набл}$. Чем больше согласуются эмпирическое и теоретическое распределения, тем меньше χ^2 .

Итак, $\chi^2_{набл} = 1,09$. Найдем $\chi^2_{кр}$. Имеем уровень значимости $\alpha = 0,01$. Число степеней свободы находим по формуле: $k = s - 3 = 6 - 3 = 3$, где $s = 6$ – число групп нашей выборки (различные x_i). По таблице критических значений находим $\chi^2_{кр}(0,01;3) = 11,345$. Таким образом, получили $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$. Следовательно, гипотеза о нормальном распределении данных выборки по косой сажени (казенной) принимается.

Великая косая сажень (рис 4). Принято считать за 249,46 см (генеральная средняя). По сгруппированным данным построена гистограмма частот (рис. 5).



Рис 4. Великая косая сажень.

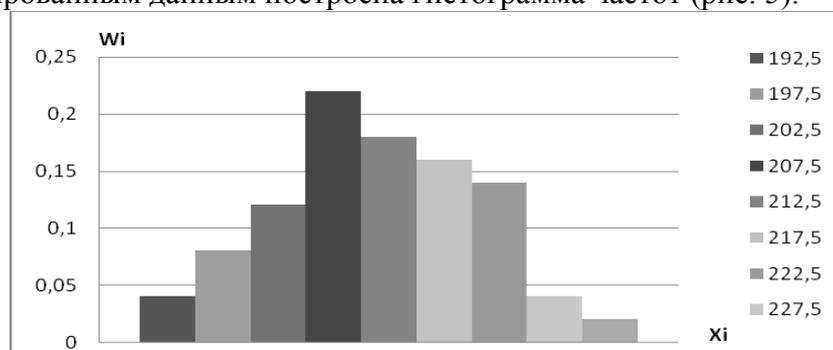


Рис 5. Гистограмма частот. Великая косая сажень.

Находим выборочное среднее: $\bar{x}_B = 211,4$ (см). $D_B = 85,29$ – выборочная дисперсия, тогда выборочное стандартное отклонение: $\sigma_B = \sqrt{D_B} = 9,24$ (см). Далее воспользуемся критерием Пирсона, вычислим выравнивающие частоты, согласно формуле (1). Построим эмпирическую и теоретическую кривые (рис. 6).

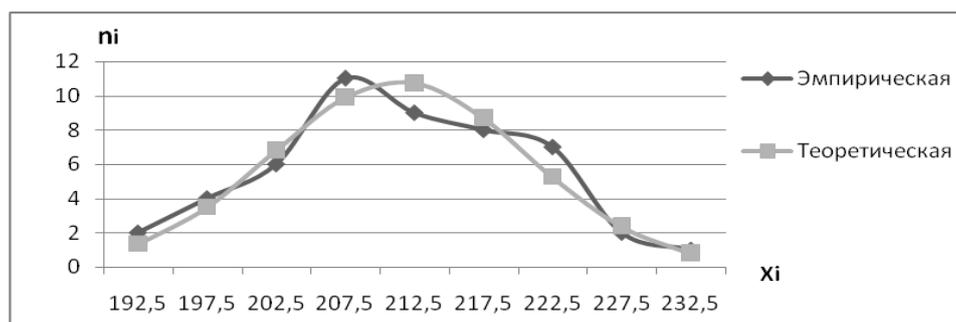


Рисунок 6. – Эмпирическая и теоретическая кривые великой косой сажени.

В качестве критерия проверки гипотезы о нормальном распределении принимается случайная величина $\chi^2_{набл}$.

Получено, $\chi^2_{набл} = 1,63$. Найдем $\chi^2_{кр}$. Имеем уровень значимости $\alpha = 0,01$. Число степеней свободы находим по формуле: $k = s - 3 = 9 - 3 = 6$, где $s=9$ – число групп нашей выборки. По таблице критических значений находим $\chi^2_{кр}(0,01;6) = 16,812$. Таким образом, получили $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$. Следовательно, гипотеза о нормальном распределении данных выборки по великой косо́й сажени принимается.

Мерная (маховая) сажень - расстояние между концами пальцев распротертых рук (рис. 7). Принято считать за 176,4 см (генеральная средняя). По сгруппированным данным построена гистограмма частот (рис. 8).

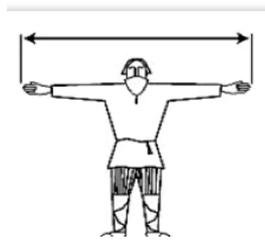


Рис 7. Мерная (маховая) сажень.

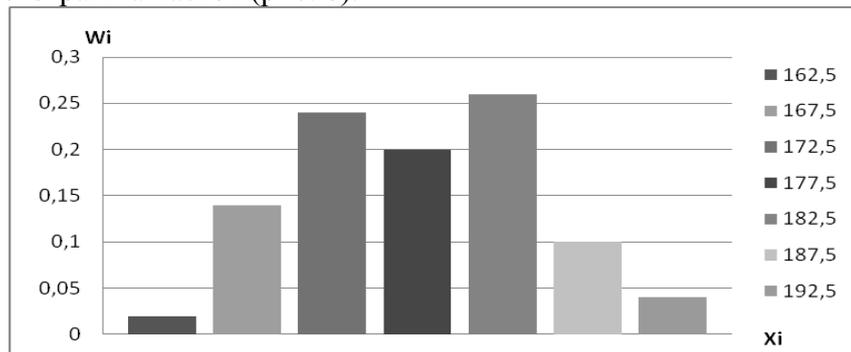


Рис 8. Гистограмма частот. Мерная (маховая) сажень.

Находим выборочное среднее: $\bar{x}_B = 177,5(\text{см})$. $D_B = 50,0$ - выборочная дисперсия, тогда выборочное стандартное отклонение: $\sigma_B = \sqrt{D_B} = 7,07$ (см). Далее воспользуемся критерием Пирсона, вычислим выравнивающие частоты, согласно формуле (1). Построим эмпирическую и теоретическую кривые (рис. 9).



Рисунок 9. – Эмпирическая и теоретическая кривые мерной (маховой) сажени.

В качестве критерия проверки гипотезы о нормальном распределении принимается случайная величина $\chi^2_{набл}$.

Для данной выборки (по мерной, маховой сажени) $\chi^2_{набл} = 2,58$. Найдем $\chi^2_{кр}$. Имеем уровень значимости $\alpha = 0,01$. Число степеней свободы находим по формуле: $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$, где $s=7$ – число групп нашей выборки. По таблице критических значений находим $\chi^2_{кр}(0,01;4) = 13,277$. Таким образом, получили $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$. Следовательно, гипотеза о нормальном распределении данных выборки по мерной (маховой) сажени принимается.

Простая сажень (рис. 10) – принято считать 152, 76 см (генеральная средняя). По сгруппированным данным построена гистограмма частот (рис. 11).

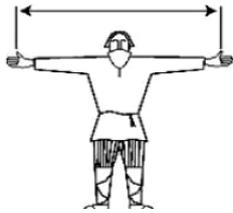


Рис 10. Простая сажень.

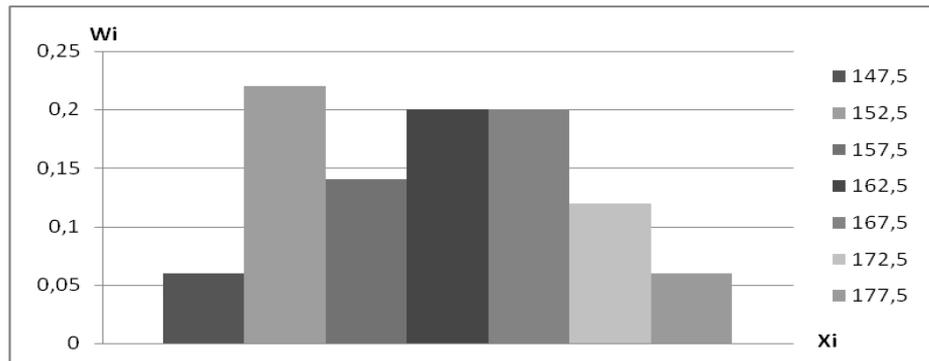


Рис 11. Гистограмма частот. Простая сажень.

Находим выборочное среднее: $\bar{x}_B = 161,8(\text{см})$. $D_B = 69,01$ - выборочная дисперсия, тогда выборочное стандартное отклонение: $\sigma_B = \sqrt{D_B} = 8,31$ (см). Далее воспользуемся критерием Пирсона, вычислим выравнивающие частоты, согласно формуле (1). Построим эмпирическую и теоретическую кривые (рис. 12).

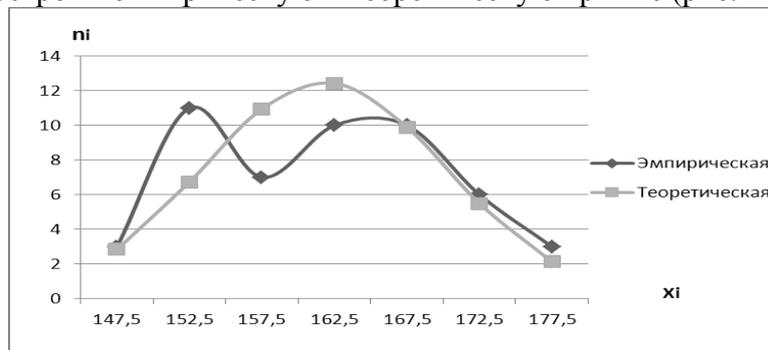


Рисунок 12. – Эмпирическая и теоретическая кривые простой сажени.

В качестве критерия проверки гипотезы о нормальном распределении принимается случайная величина $\chi^2_{набл}$.

Для данной выборки (простой сажени) $\chi^2_{набл} = 5,02$. Найдем $\chi^2_{кр}$. Имеем уровень значимости $\alpha = 0,01$. Число степеней свободы находим по формуле: $k = s - 3 = 7 - 3 = 4$, где $s=7$ - число групп нашей выборки. По таблице критических значений находим $\chi^2_{кр}(0,01;4) = 13,277$. Таким образом, получили $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$. Следовательно, гипотеза о нормальном распределении данных выборки по простой сажени принимается.

Таким образом, исследована старорусская мера длины - сажень. Выделены виды сажени: косая (казенная); великая косая; мерная (маховая), простая. По каждому виду сажени найдены выборочное среднее, выборочное стандартное отклонение, использован критерий согласия Пирсона для проверки гипотезы о нормальном распределении.

Выдвинутая гипотеза подтвердилась: полученная выборка по каждой из выделенных сажени, имеет нормальное распределение.