УДК 510.649

АКСИОМАТИЗАЦИЯ ИНТУИЦИОНИСТСКИХ ЛОГИК МАЛОЙ ГЛУБИНЫ

Башмаков С.И.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Голованов М.И.
Сибирский федеральный университет

В работе Чагрова и Захарьящева доказан факт алгоритмической неразрешимости задачи аксиоматизации табличных логик [1]. В то же время, в той же работе ими доказана возможность конечной аксиоматизации табличных суперинтуиционистских логик [1]. Пользуясь возможностью семантического изучения логик, путем рассмотрения соответствующих им фреймов, мы поставили задачу создания полных систем аксиом некоторых логик малой глубины.

Фреймом Крипке, или просто фреймом, называется частично упорядоченное множество F := < F, ≤ > (или, кратко, ч.у.м.). То есть отношение ≤ является рефлексивным, транзитивным и антисимметричным.

Означиванием называется отображение V, удовлетворяющее следующим свойствам:

1. $V: P \to 2^W$, то есть $\forall\ p \in P\ (V(p) \subseteq W)$,
2. $(\forall a\ \forall b \in W)(\forall p \in P)(a \le b \Rightarrow (a \in V(p) \Rightarrow b \in V(p)))$.

Интуиционистская модель Крипке – тройка M = <F, ≤, V>.

Важное свойство интуиционистской модели Крипке заключается в следующем: если формула α истинна на элементе a, заданной интуиционистской модели, и $a \le b$, то α истинна и на b.

Также, разъяснения требует операция импликации, в условиях интуиционистских логик: $\varphi \to \psi$ выполняется в точке x, если во всех $y \ge x$ когда выполняется ψ, выполняется и φ.

На первом этапе нами были построены все корневые фреймы глубины ≤ 3. С учетом дополнительных ограничений на ширину (2 точки), получены следующие 10 фреймов:

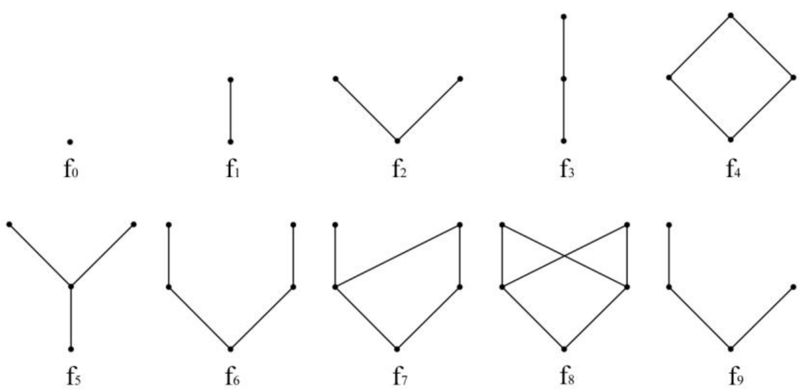

Рисунок – 1 Фреймы глубины 3 ширины 2

Построены также 10 их замкнутых классов (по числу фреймов), состоящих из порождающих фреймов, их подфреймов и p-морфных образов. Построенные классы не исчерпывали все возможности, поэтому, также, были построены классы фреймов, представляющие собой всевозможные комбинации объединений построенных десяти замкнутых классов, но отличные от них. Все классы были представлены в виде решетки, каждый узел которой соответствует определенному замкнутому классу фреймов. Здесь самым маленьким элементом стал класс, представленный одним одноточечным фреймом F_0, самым сложным – объединение классов F_6, F_7, F_8. Данный класс состоит сразу из всех десяти фреймов. В свою очередь, более сложный класс фреймов адекватен более узкой логике, наиболее же простой класс – фрейм F_0 – представляет собой классическую пропозициональную – наиболее широкую логику. Поэтому не возникло трудностей с построением решетки логик – она антиизоморфна построенной решетке классов фреймов:

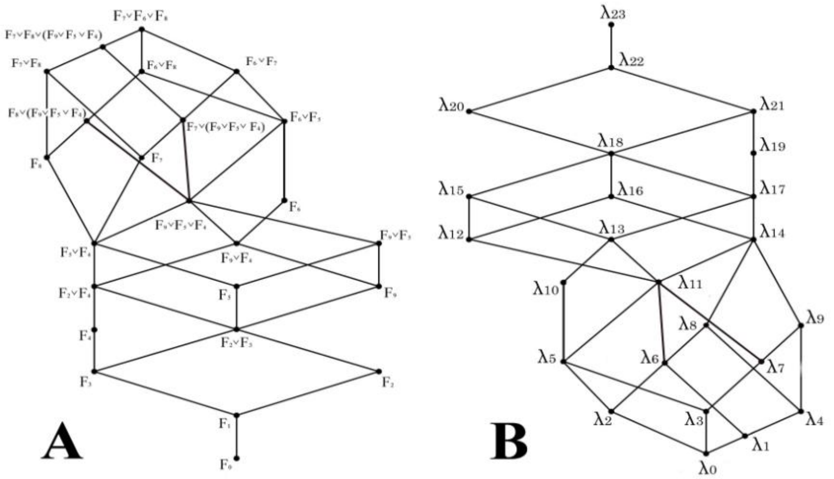

Рисунок – 2 А – Решетка замкнутых классов фреймов;
В – Решетка соответствующих логик.

На втором этапе работы первым шагом был определен перечень известных аксиом, общих для всех интуиционистских логик – это аксиоматическая система Гейтинга: 9 аксиом классического пропозиционального исчисления, ослабленный закон исключенного третьего, а также правила вывода – modus ponens и правило подстановки. Индивидуальные же особенности конкретных фреймов должны быть описаны дополнительными аксиомами. Как довольно общие особенности: ветвления, число точек в том или ином слое, ширина и глубина фрейма. Так и более сложные, являющие собой композиции этих ограничений. В литературе представлены некоторые наиболее общие формулы, вводящие ограничения на тот или иной параметр: ограничение глубины, ширины фрейма, числа точек первого слоя и другие ограничения. В частности, индуктивные формулы Нишимура от одной переменной, опровергающиеся на фреймах определенного вида из схемы Нишимура:

$$\mathrm{n}f_{\mathrm{w}} = \top, \quad \mathrm{n}f_0 = \bot,$$
$$\mathrm{n}f_1 = p, \quad \mathrm{n}f_2 = \neg p,$$
$$\mathrm{n}f_{2n+3} = \mathrm{n}f_{2n+1} \vee \mathrm{n}f_{2n+2},$$
$$\mathrm{n}f_{2n+4} = \mathrm{n}f_{2n+3} \to \mathrm{n}f_{2n+1}.$$

1) Формула $\mathrm{n}f_{2n}$ опровергается на фрейме $f \Leftrightarrow$ среди открытых подфреймов и p-морфных образов фрейма f есть фрейм N_n.

2) Формула $\mathrm{n}f_{2n-1}$ опровергается на фрейме $f \Leftrightarrow$ среди открытых подфреймов и p-морфных образов фрейма f есть фрейм N_{n+1} или фрейм $N_{n+2.}$

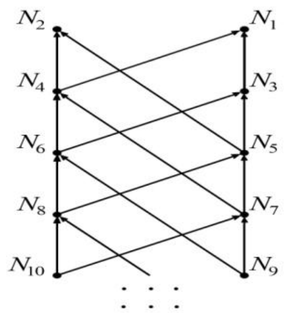

Рисунок – 3 Схема фреймов Нишимура с обозначениями.

При помощи такого набора формул оказалась возможной полная аксиоматизация некоторых фреймов и, соответственно, порожденных ими классов (F_0, …, F_4). Дальнейшая аксиоматизация других логик была невозможна без создания новых аксиом, описывающих конкретные фреймы. Поэтому нами были созданы некоторые новые формулы. В частности, была создана формула для фрейма F_5, ограничивающая число точек второго слоя одной точкой:

$$spsl = (p \to q) \vee (q \to p) \vee \neg(p \wedge q).$$

Для доказательства истинности этой формулы было показано, что не существует интуиционистского означивания, при котором все три дизъюнктивных члена формулы не выполняются. Противоположно, на проверяемых фреймах F_4, F_6, F_7, F_8 были построены означивания, при которых формула опровергается.

Тем самым, система аксиом для класса, порожденного фреймом F_5, состоит из данной формулы, аксиом ширины, глубины и аксиом Гейтинга.

Для фрейма F_4 были построены две формулы, по сути, заменяющие аксиому ширины в аксиоматической системе, построенной из известных аксиом.

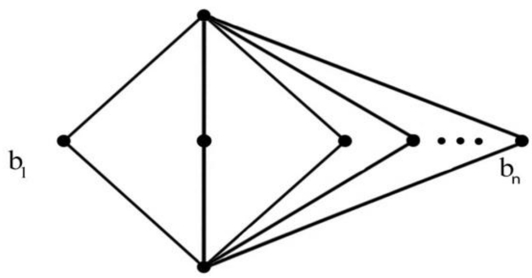

Рисунок – 4 Фрейм $f_{4,n}$

Первая – ограничивает двумя точками число точек второго слоя во фрейме F_4, а также фреймах подобного вида (где n – число точек второго слоя):

$$sl_n = \bigwedge_{i=0}^{n} \neg(q_i \to p) \to \bigvee_{i=0,\, j=0,\, i \neq j}^{n} (q_i \to q_j).$$

Вторая, в отличии от *spsl*, «отличает» фрейм F_4 от F_5:

$$antispsl = (p \to q) \vee (q \to p) \vee \neg\neg(p \wedge q).$$

Помимо этого, был осуществлен поиск формул, аксиоматизирующих некоторые другие логики, фреймы которых ранее не были нами построены. Ширина которых превышает 2. В частности фрейм F_{10}:

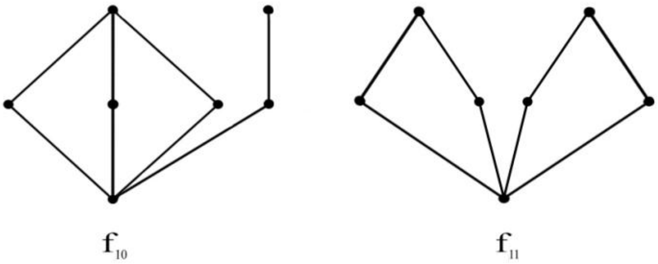

Рисунок – 5 Фреймы F_{10}, F_{11} глубины 3, ширины 4

Для данных фреймов одинаково истинен набор известных аксиом. Для полноты системы достаточно добавить формулу fsl_4, истинную на фрейме F_{10}, но опровергающуюся на втором фрейме.

$$fsl_n = \bigwedge_{S_3[1,2,3,4]} \left(\bigvee_{i,j,k=S_3} (p_i \wedge p_j \rightarrow \neg p_k)\right) \rightarrow \bigvee_{i,j} (p_i \rightarrow p_j).$$

Далее была найдена формула для фрейма F_{12}, являющегося *p*-морфным образом рассмотренного фрейма F_{10}. Фрейм получен путем склейки двух точек:

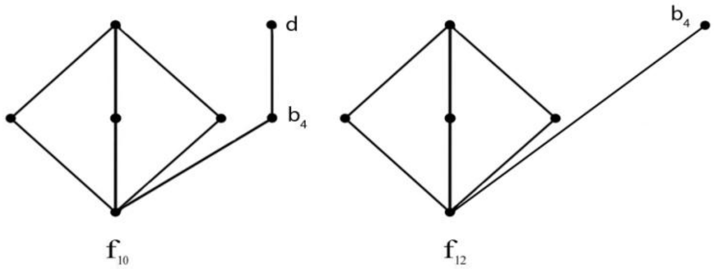

Рисунок – 6 Фрейм F_{10} и его p-морфный образ – фрейм F_{12}, полученный путем склейки точек b_4 и d.

Формула отличает данный фрейм от фрейма F_{10}:

$$ttpc_4 = \bigvee_{i=1,j-1,i\neq j}^{4} (q_i \rightarrow q_j) \vee \bigvee_{i=1}^{4} (q_i \rightarrow (r \vee \neg r)).$$

Для фрейма F_{12} формула имеет индекс 4, но она также может быть обобщена для произвольного n. Т.е. для фреймов схожего вида, различного числа точек второго слоя. В частности, для фрейма F_9, входящего в изначальные 10 фреймов ширина не более двух, этой формулы с индексом 2, наряду с известными формулами и аксиомами Гейтинга, достаточно для полноты аксиоматической системы.

Итак, нами было реализовано построение решетки рассматриваемых классов фреймов и решетки соответствующих логик, описаны и построены полные системы аксиом семи логик, максимальной ширины 2, а также 3-х логик большей ширины, созданы описанные мной аксиомы, недостающие для полноты аксиоматизации соответствующих рассмотренных логик.

---

1. Chagrov A. V., Zakharyaschev M. V. Modal logic // Oxford: Oxford Press. 1997. 610 p.